Orgaan van de

Nederlandse Vereniging

van Wiskundeleraren

EUCLIDES

Vakblad voor de wiskundeleraar

jaargang 71

1995-1996 oktober

2



Vwo- en havo-
examens 1995

Nieuwe hoofdredacteur
gezocht

Uitslag van
een bijzonder prisma

Koppelen van
ongekoppelde modellen



EUCLIDES

Redactie

Dr. A.G. van Asch
Drs. R. Bosch
Drs. J.H. de Geus
Drs. M.C. van Hoorn *hoofdred.*
J. Koekkoek
Ir. P. ten Kortenaar
Ir. W.J.M. Laaper *secretaris*
N.T. Lakeman
W. Schaafsma
Ir. V.E. Schmidt *penningmeester*
Mw. Y. Schuringa-Schogt *eindred.*
Mw. drs. A. Verweij
A. van der Wal
Drs. G. Zwaneveld *voorzitter*

Euclides is het orgaan van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren. Het blad verschijnt 8 maal per cursusjaar.

Artikelen/mededelingen

Artikelen en mededelingen worden in drievoud ingewacht bij drs. M.C. van Hoorn, Noordersingel 12, 9901 BP Appingedam.
Voor meer informatie: zie 'Richtlijnen voor auteurs' op bladzijde 22. De auteur van een geplaatst artikel ontvangt kosteloos 2 exemplaren van het nummer waarin het artikel is opgenomen.

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Voorzitter
dr. J. van Lint, Spiekerbrink 25, 8034 RA Zwolle, tel. 038-4539985.
Secretaris
R.J. Bloem, Kornoelje 37, 3831 WJ Leusden.
Ledenadministratie
Mw. N. van Bemmel-Hendriks, De Schalm 19, 8251 LB Dronten, tel. 0321-312543.
Giro: 143917 t.n.v. Ned. Ver. v. Wiskundeleraren te Amsterdam.
De contributie bedraagt *f* 65,00 per verenigingsjaar; voor studentleden en Belgische leden die ook lid zijn van de VVWL *f* 47,50; contributie zonder Euclides *f* 40,00.
Opgave van nieuwe leden aan de ledenadministratie.
Opzeggingen vóór 1 juli.

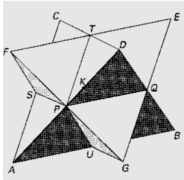
Abonnementen niet-leden

Abonnementsprijs voor niet-leden *f* 71,00. Een collectief abonnement (6 exemplaren of meer) kost per abonnement *f* 48,00. Opgave bij de ledenadministratie (adres: zie boven).
Abonnees wordt dringend verzocht te wachten met betalen tot zij een acceptgiro hebben ontvangen.
Abonnementen gelden telkens vanaf het eerstvolgend nummer.
Reeds verschenen nummers zijn op aanvraag leverbaar.
Annuleringen dienen vóór 1 juli te worden doorgegeven aan de ledenadministratie.
Losse nummers *f* 12,50.

Advertenties

Advertenties sturen naar:
C. Hoogsteder, Prins Mauritshof 4, 7061 WR Terborg; tel. 0315-324337
of naar:
L. Bozuwa, Merwekade 90, 3311 TH Dordrecht; tel. 078-6145522.

Inhoud



70

Het overvloedige 70

De echte delers van 70, in het Engels aliquot divisors, zijn 1, 2, 5, 7, 10, 14 en 35 met als som 74. Daar dit getal groter is dan 70 noemt men 70 een overvloedig getal,in het Engels abundant, redundant of excessive.
Het woord abundant komt uit het Latijn, waarbij het voorste ‘ab’ zoveel wil zeggen als -weg van,van- en het deel ‘unda’ -golf-, terwijl ‘nt’ een soort uitgangsvorm is.
Het produkt van 70 met een ander overvloedig getal is altijd weer overvloedig.
Nu is 70 niet te schrijven als som van enkele van zijn delers. Om die reden wordt het niet semi-perfect genoemd. En een overvloedig getal dat niet semi-perfect is wordt een weird abundant getal genoemd.
70 is het kleinste van deze getallen, andere zijn o.a. 836, 4030 en 7912. Hoeveel er zijn is nog een vraag.
Dit is dan misschien wel de reden dat 70 een blij getal (happy number) is. De reden?
70 bestaat uit de 7 en de 0. Nu is $7^2 + 0^2 = 49 \rightarrow 4^2 + 9^2 = 97 \rightarrow 9^2 + 7^2 = 130 \rightarrow 1^2 + 3^2 + 0^2 = 10 \rightarrow 1^2 + 0^2 = 1$ en om deze reden is 70 een blij getal.
70 is zelfs het produkt van de blijde getallen 7 en 10.
Het is daarentegen geen gelukkig getal (lucky number) volgens Ulam, wat wel over vijf jaar geldt voor 75.
En dat is toch ook wel prettig.

literatuur o.a.:

S. Schwartzman
The Words of Mathematics
uitg. The Mathematical Association of America

In dit artikel komen de examenresultaten aan de orde aan de hand van de steekproefgegevens die het Cito verzameld heeft (J.J. Breeman, drs. C. Lagerwaard en H.N. Schuring).
De meningen van de docenten vindt men daarna in een verslag van de regionale besprekingen van deze examens, georganiseerd door de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (drs. J.W. Maassen).

Eindexamens vwo en havo, eerste tijdvak 1995

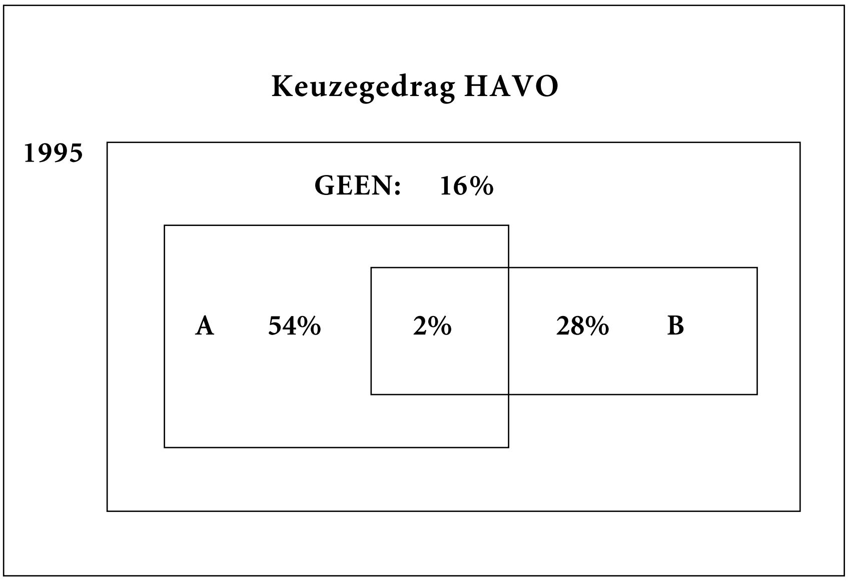
H.N. Schuring, C. Lagerwaard, J.J. Breeman, J.W. Maassen

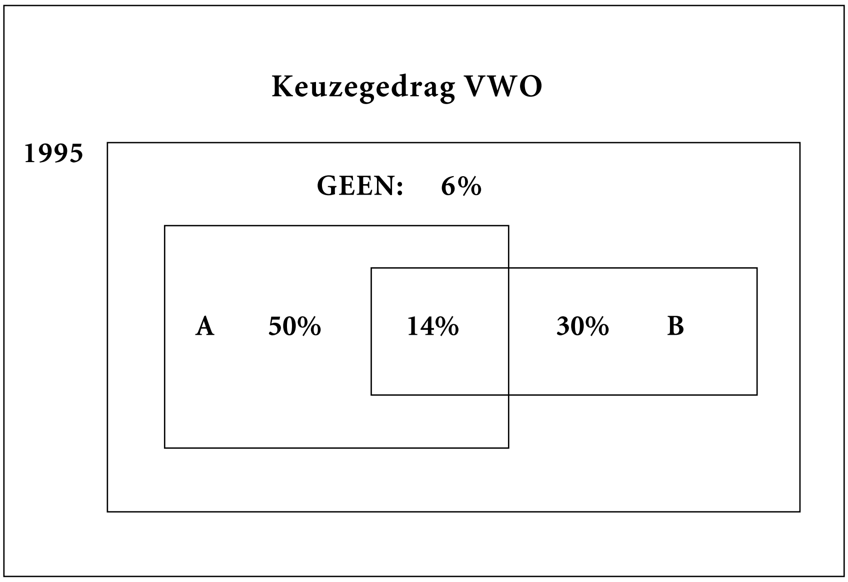
De resultaten van de examens

Het geven van een overzicht van de resultaten van deze examens (zie pagina 47) is slechts mogelijk dankzij de medewerking van de betrokken docenten die de gegevens van vijf kandidaten van hun school tijdig hebben opgestuurd.

Keuzegedrag van de leerlingen

Zoals in de schema’s te zien is, heeft 16% van alle havo-kandidaten examen gedaan zonder wiskunde. Vergeleken met 1994 is dat 1% minder. Het percentage havo-kandidaten dat examen deed in wiskunde A was iets groter dan vorig jaar. De deelname aan wiskunde B nam 1% af, terwijl het percentage dubbelkiezers gelijkbleef.
Voor vwo-leerlingen is wiskunde nog aantrekkelijker: slechts 6% van de vwo-kandidaten deed geen examen in wiskunde. Vergeleken met 1994 is er een zeer geringe toename voor wiskunde A en een even geringe afname voor wiskunde B.





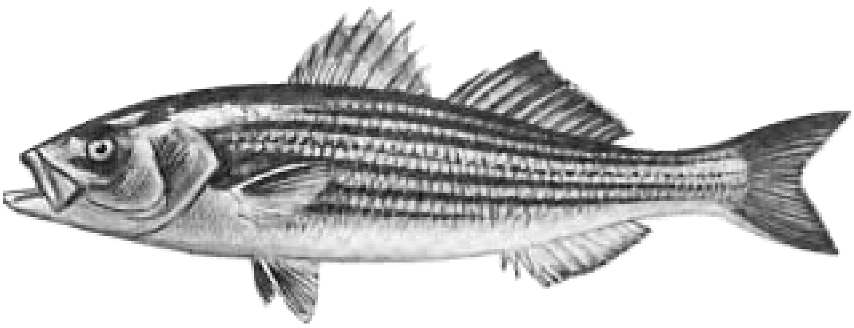
Vwo wiskunde A

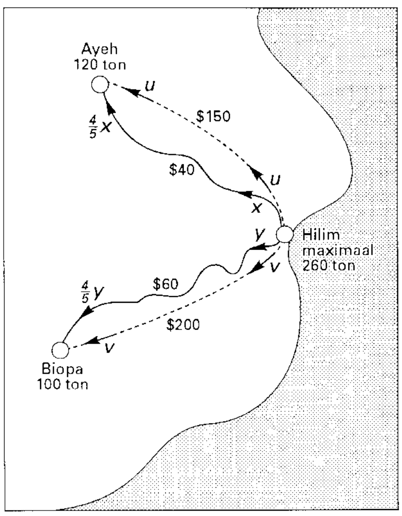
Opgave 1 Zeebaarzen bleek een goede startopgave. Wel was het opvallend dat veel kandidaten bij vraag 2 problemen hadden met de stap $P(X = 18) \approx P(17{,}5 \leq X < 18{,}5)$.

Mogelijk komt het overstappen van een discrete verdeling naar een continue verdeling in hun laatste voorbereiding vrijwel uitsluitend aan de orde bij het toetsen van hypothesen en is het algemene begrip achter een dergelijke overstap op het moment van het examen weggezakt. De bijlage die overigens pas vrij laat in de constructiefase van het examen als beveiliging was opgenomen, heeft goed gewerkt. Het heeft de kandidaten enige zekerheid gegeven over wat van hen verwacht werd. De werkelijke gemiddelde score op de vragen 3 en 4 lag wellicht daardoor iets hoger dan wat de samenstellers van tevoren hadden geschat.

Opgave 2 Geluidshinder bestond uit twee gescheiden delen. Gelukkig hebben de kandidaten dat duidelijk uit de lay-out herkend. Het eerste deel (langs de snelweg, met een ln-functie) leverde namelijk geheel volgens verwachting grote moeilijkheden voor de A-sec kandidaten (A-sec: noch wiskunde-B, noch natuurkunde)*. Vraag 5 konden zij gelukkig zonder afgeleide beantwoorden. Bij een foutieve afgeleide in vraag 6 konden ze nog wel wat punten scoren. Vraag 7 (een 2 punten-vraag), die apart opgenomen was om niet twee vragen in één onderdeel te stellen, ging in zo'n geval echter volledig de mist in.
Het tweede deel (in de stad) ging opmerkelijk goed. Ook hier heeft de bijlage goed gefunctioneerd.

Opgave 3 Help! begon met de twee inleefvragen 11 en 12. Hierop werd goed gescoord. Daarna is er iets onverwachts gebeurd. Als beveiliging voor het modelleren was de





informatie uit de tekst nog weer samengevat in de extra figuur. De sleutel voor de vragen 13 en 15, namelijk $0{,}8x + u = 120$ en $0{,}8y + v = 100$ was daarin expliciet aangebracht. Heel wat kandidaten hebben dit niet doorzien, met verstrekkende gevolgen voor de score op de vragen 13 en 15 (zie overzicht).

Opgave 4 Aspirine heeft misschien wat last gehad van het mislukken van 13 en 15 en het tijdverlies bij die vragen. De gemiddelde score op vraag 16 viel (daardoor?) wat tegen; hypothese toetsen ging de afgelopen jaren namelijk vrij goed als het model zoals nu gemakkelijk uit de tekst te halen was. De context kan ook het probleem niet geweest zijn, een dubbelblind experiment komt nadrukkelijk in alle methodes meerdere malen aan de orde. Vraag 17 scoorde zoals verwacht, terwijl de kansvraag 18 als uitsmijter wat minder scoorde. Aan dit laatste kan zoals velen signaleerden een lichte tijdnood debet zijn. Niet onmogelijk is ook dat het opzetten van een kansmodel wel nadrukkelijk in de vijfde klas aandacht krijgt maar zo aan het eind van de zesde wat uit het zicht verdwenen is.

Bij de cesuur 54/55 zou het percentage onvoldoendes op grond van de steekproef van 5 kandidaten per school even onder de 50% hebben gelegen. De boven beschreven problematiek bij de vragen 13 en 15 was het enige argument op grond waarvan, met aarzeling, de cesuur werd gelegd bij 50/51.

Vwo wiskunde B

44% van alle vwo-kandidaten heeft het wiskunde B-examen afgelegd; vorig jaar was dit percentage 45. Dit examen werd door veel docenten als te moeilijk en te origineel gekenschetst. Stuk voor stuk waren het mooie opgaven, maar samen vormen ze geen goed examen. De eerste opgave was voor veel leerlingen geen goede binnenkomer.

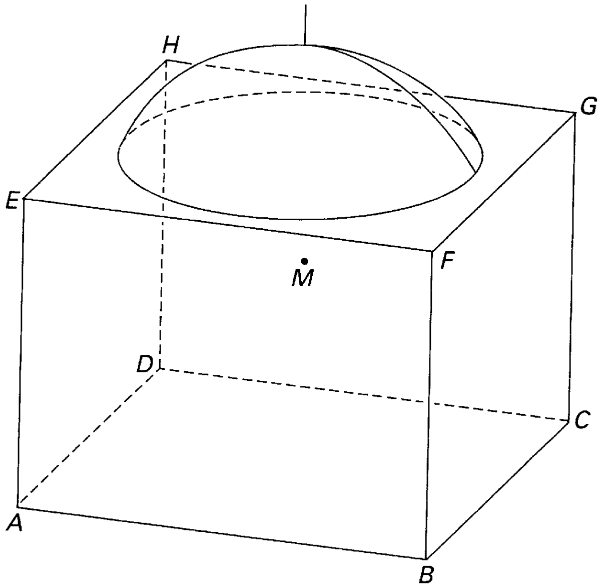
Opgave 1, over een tweedegraads functie, waarvan de grafiek een bergparabool is met de y-as als symmetrieas, is sterk beneden de verwachting beantwoord. 40% van de kandidaten kon in vraag 1 het punt op de y-as niet vinden waaruit de raaklijnen aan de grafiek van f onderling loodrecht zijn. In vraag 2 moest een parameterwaarde gevonden worden, zo dat een oppervlakte een gegeven waarde werd. De uitwerking leidt tot een vergelijking waarbij linker en rechter lid te schrijven is als een macht met exponent 1,5. Slechts weinig kandidaten konden dit oplossen.

In vraag 3 moest een functie gevonden worden, links van een gegeven punt identiek aan f, waarbij het gegeven punt middelpunt van symmetrie van de grafiek is. 48% van de kandidaten wist hier geen raad mee.

Opgave 2, over een parameterkromme, waarvan een gedeelte getekend is, had redelijke resultaten in de standaardvragen 4 en 5. Vraag 6, over de oppervlakte van een vierhoek, gevormd door de raaklijnen in gegeven punten, heeft een magere p′-waarde (44). De differentiaalvergelijking in de vragen 7 en 8 was ook weinig succesvol. 58% en 48% van de kandidaten wist hier geen raad mee.

Opgave 3 was dit jaar een functieonderzoek met een e-macht. Hoewel vraag 9 veel limieten vroeg te onderzoeken was het resultaat, evenals van vraag 10, redelijk. Vraag 11 was de moeilijkste vraag van het gehele examen. De p′-waarde is 20, terwijl 72% van de kandidaten hierop niet wist te scoren.

Opgave 4 is door velen als een aardige stereometrie-opgave beschouwd, maar omdat dit de laatste opgave van een moeilijk examen is, vallen de resultaten tegen, vooral van de vragen 13 en 14. Vraag 15, een dwarsverband tussen de analyse en de stereometrie, was niet te maken voor 70% van de kandidaten. De inhoudsberekening voerde tot een eenvoudige integraal, wat 17% van de kandidaten ervaren zal hebben.



Op grond van de slechte resultaten en omdat de samenstellers van de opgaven vorig jaar een gemiddelde score van 61 voorspeld hebben, terwijl de werkelijke gemiddelde score dit jaar slechts 50 was, heeft de CEVO besloten de cesuur te leggen bij 44/45.

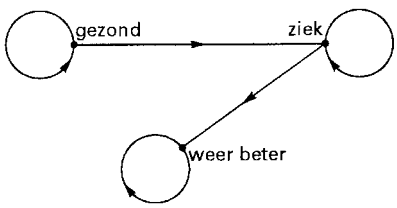
Havo wiskunde A

Een meerderheid van de docenten vond het niveau van het examen van dit jaar vergelijkbaar met dat van vorig jaar, terwijl anderen het moeilijker vonden dan het 1994-examen.

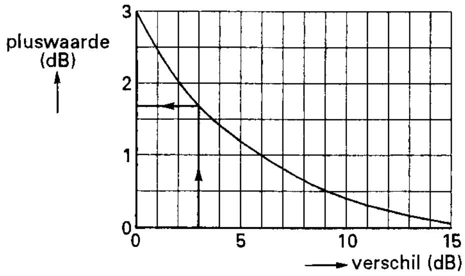
De gemiddelde score was met 56 punten iets lager dan vorig jaar. De gemiddelde scores per vraag staan in het overzicht aan het eind van dit artikel.

Bij het samenstellen van een exa-

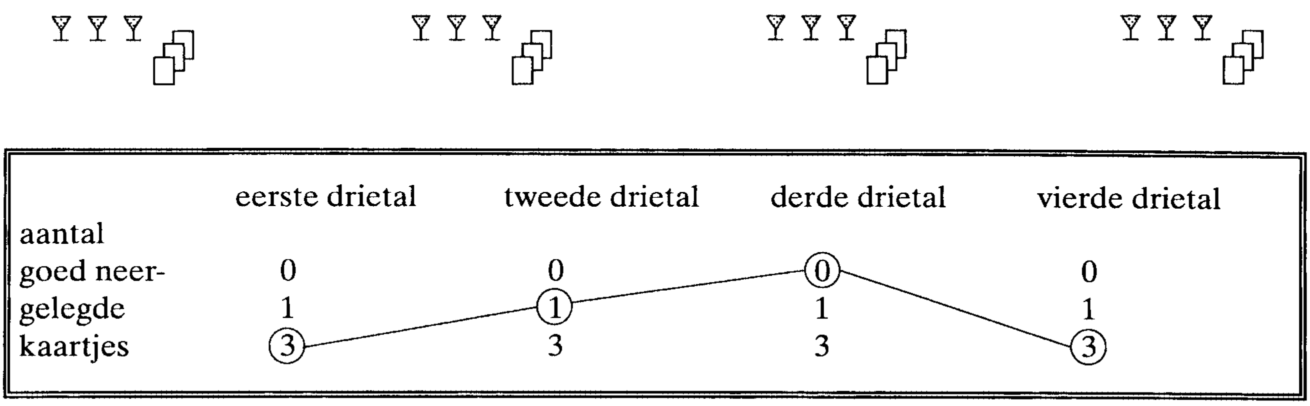
men is het examenprogramma de leidraad. Er wordt gestreefd naar een goede verdeling van de vragen over de drie leerstofgebieden Tabellen Grafieken Formules (TGF), Discrete Wiskunde(DW) en Statistiek en Kans (SK).
Opgave 1 was een TGF-opgave met nadruk op lineariteit en grafieken. De opgave Wijn proeven bevatte vragen over de leerstofgebieden DW (tellen) en SK (kans). De derde opgave had een sterk DW-karakter. Opgave 4 begon met een staafdiagram en kan verder worden ingedeeld bij TGF (tabellen en exponentiële functies). Lawaai van machines is een TGF-opgave (grafiek, formule, tabel). Door het betrekkelijk geringe aantal opgaven en vragen is het uiteraard niet mogelijk dat over elk van de talrijke leerstofonderdelen een vraag gesteld wordt. Dat verklaart waarom er dit jaar bijvoorbeeld geen vraag was over de normale verdeling.
Uiteraard moet een examen ook zoveel mogelijk recht doen aan de ‘Algemene beschrijving van kennis en vaardigheden’ binnen het vak wiskunde A. Van die algemene doelen speelden in dit examen ‘wiskundige probleemstellingen extraheren uit teksten’, ‘probleemstellingen analyseren’ en ‘een geschikte werkwijze kiezen om een probleem op te lossen en algoritmen te gebruiken bij de uitvoering ervan’ een belangrijke rol, waarbij er ook ruime aandacht was voor rekenen en redeneren.
Laten we de opgaven eens nader bekijken.
Opgave 1 Scores en cijfers was een geslaagd beginvraagstuk. Lineair interpoleren en het werken met grafieken ging de leerlingen behoorlijk goed af.
Opgave 2 Wijn proeven bestond uit 5 vragen. De combinatoriek in vraag 4, het kansrekenen in vraag 5 en 6 en het tellen van routes in vraag 7 was voor veel leerlingen te doen. De kansvraag 8, die aansluit op de goed gemaakte vraag 7 (p′ = 84), ging niet goed (p′ = 29).
Opgave 3 Ziek zijn gaf veel problemen. Vraag 9 was een eenvoudige startvraag, maar het vinden van de aantallen van een week eerder in vraag 10 lukte maar weinigen (p′ = 17; 78% van de kandidaten scoorde 0 punten). De vragen 11 en 12, waar de gegevens in een tabel en een schema werden verstrekt, gaven matige resultaten te zien (p′ = 33, resp. 34). De laatste vraag van deze opgave waarin getallen bij een graaf moesten worden gezocht, ging iets beter.



Opgave 4 begon met een vraag die slechts door zeer weinig leerlingen werd doorzien, waardoor dit de slechtst gemaakte vraag van het examen werd (p′ = 14). Omdat er van enig ketting- of stapeleffect geen sprake was, gingen de volgende vragen uitstekend. Ook de laatste vraag van deze opgave werd redelijk gemaakt.
De laatste opgave bracht niet wat de opstellers ervan verwacht hadden. De uitleg van het algoritme voor het optellen van 2 lawaaibronnen met het erbij gegeven voorbeeld leek ons duidelijk.



Dat het maken van een formule in vraag 18 desondanks moeilijk zou zijn, was verwacht. Maar de vragen 19 en 20 werden niet goed gemaakt. Waarschijnlijk is onvoldoende helder verwoord hoe dat algoritme ook kon worden gebruikt om het lawaai van meer dan 2 machines te berekenen. Vraag 19 had nog een score van 42%, maar met de laatste vraag wisten de meeste leerlingen helemaal geen raad (76% scoorde 0 punten).



Wijn proeven

Korrel

Plus tien

Over de examens is elk jaar wel wat te doen. Er is een opgave die niet door de beugel kan, de omvang van het werk is te groot, de vragen gingen niet over de stof. Altijd zijn er mensen die met zulke aanmerkingen komen.
Meestal is er een vrij grote tevredenheid. 'Het examen was goed te doen', volgens velen.
Havo- en vwo-kandidaten kunnen punten verdienen door afzonderlijk het tekenverloop van een functie weer te geven. Dit bewijst dat je de leerlingen nog steeds kunt *dresseren* op het bijeen sprokkelen van punten.
Werklust is mooi, en mag ook best beloond worden, maar dan het liefst wanneer werklust leidt tot - uiteindelijk - begrip.
In 1995 is er een unieke kans geweest om, ondanks mogelijke tekortkomingen, een fraai cijfer te halen. Dat was bij het herexamen wiskunde B vwo.
Wat was het geval? Door de ramp met het eerste tijdvak-examen kregen alle kandidaten er een vol punt bij.
Een 4,9 werd alsnog een 5,9.
De bureaucratie had ooit bedacht dat zo'n punt er dan ook in het tweede tijdvak bij cadeau gegeven moest worden. Hetgeen geschiedde.
Met andere woorden: op het herexamen, dat een normaal examen was (althans: naar verluidt) kregen alle kandidaten een vol punt te veel.
Proficiat!

M. van Hoorn

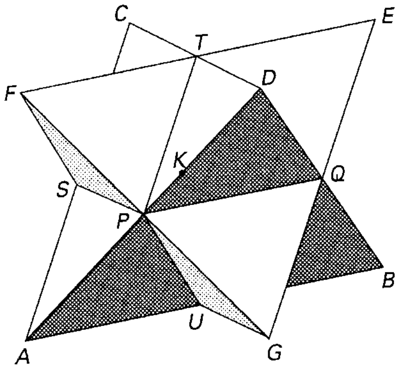


Gelet op de moeilijkheidsgraad van het examen, vooral veroorzaakt door het drietal 10, 14 en 20, heeft de CEVO de cesuur gelegd bij 50/51.

Havo wiskunde B

30% (vorig jaar 31%) van alle havo- kandidaten hebben aan dit examen deelgenomen. 2% hiervan hebben ook examen afgelegd in wiskunde A.
Dit jaar, in het vierde jaar dat het examen havo wiskunde B landelijk afgenomen is, heeft de CEVO besloten een cesuurverschuiving toe te passen van 8 punten tot 46/47. De voornaamste reden is de lengte van het examen. De vragen waren zo tijdrovend, ook door de lange lees- en inleeftijd, dat veel kandidaten niet aan de laatste vragen zijn toegekomen.
De samenstellers van dit examen hadden vorig jaar een gemiddelde score van bijna 60 voorspeld.

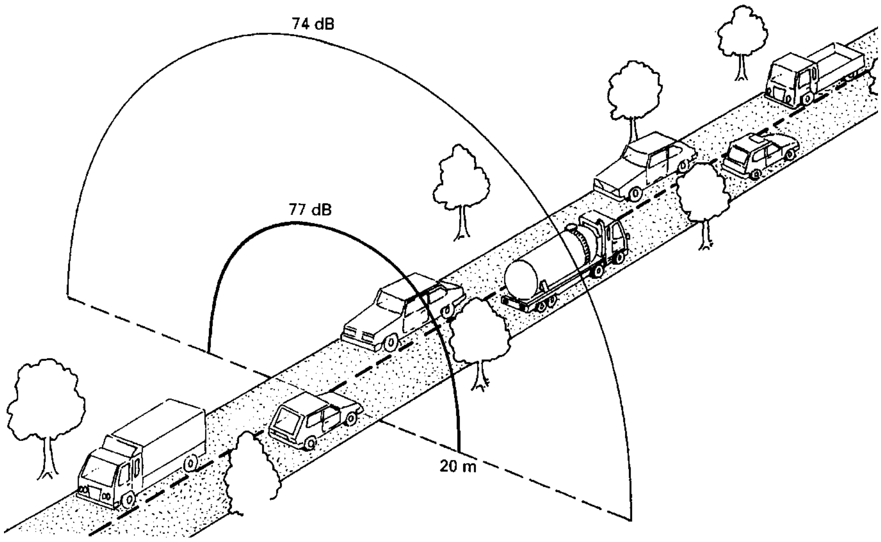
Opgave 1 heeft niet als een goede binnenkomer gefunctioneerd. De vragen 2, 3 en 4 over het opstellen van een tweedegraads functie, het berekenen van de extreme waarden en het tekenen van de grafiek, hebben magere resultaten opgeleverd. Het gegeven van de symmetrie van de grafiek van de afgeleide functie was voor veel leerlingen waarschijnlijk erg moeilijk.
Opgave 2, de Keplerster, is redelijk goed gemaakt.
Met de buitenoppervlakte in vraag 6 en de tekeningen in de vragen 7 en 8 zagen veel kandidaten kans punten te verdienen. In deze opgave is vraag 10, de vergelijking van de inhouden van de ster en het bijpassende doosje, de vraag met de laagste score. 82% wist hier geen raad mee.



In **opgave 3**, lawaai, werd het geluiddrukniveau gevraagd met behulp van een gegeven formule in de vragen 11 en 12. Vraag 13, waarin een afstand gevraagd werd, is beter gemaakt dan voorspeld was.

Regionale besprekingen 1995

Traditiegetrouw organiseerde de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren ook in 1995 regionale besprekingen voor het examen wiskunde.
Voor wiskunde B havo gebeurde dit op 9 plaatsen, voor wiskunde A en B vwo en voor wiskunde A havo op 8 plaatsen.
Bijna 250 docenten bezochten de besprekingen voor wiskunde A havo en ruim 225 de besprekingen voor wiskunde A vwo, de bijeenkomsten voor wiskunde B havo en vwo trokken beide ongeveer 190 docenten.



In **opgave 4**, slagbal, zijn de vragen 17, 18 en 19 met p′-waarden kleiner dan 20, zeer slecht gemaakt. Zo'n 80% van de kandidaten hebben met deze vragen geen raad geweten. Misschien is tijdgebrek wel de belangrijkste oorzaak, hoewel het werken met goniometrische formules door veel kandidaten altijd moeilijk gevonden wordt. De hoekberekening in vraag 14 was succesvol, terwijl de tekening en de berekening in de vragen 15 en 16 een nogal mager resultaat te zien geven.

Evenals vorige jaren werden op de bijeenkomsten aan het begin enige vragen over het examen gesteld. Dit leidde tot de resultaten in tabel 3 op pagina 46.

Van bijna alle bijeenkomsten zijn verslagen gemaakt waarvan een kopie aan de CEVO is gezonden met het verzoek de gemaakte opmerkingen te gebruiken bij het opstellen van de examens voor de volgende jaren.
In dit artikel worden slechts de belangrijkste punten uit de verslagen samengevat.

Vwo wiskunde A

Men vond het werk van een redelijk niveau, maar sommige onderdelen waren zo eenvoudig dat praktisch iedere kandidaat scoorde, terwijl bij andere onderdelen slechts zeer weinig gescoord werd.
In het algemeen vond men de omvang van het examen, mede qua leeswerk, te groot. De teksten en contexten eisen van de kandidaten een grondige inleving. Sommigen spreken over te veel tekst en te weinig wiskunde.
Enige docenten vragen zich af wat de tendens wordt van wiskunde A. Gaat dit van vaardigheden naar probleemoplossing?
Volgens sommigen is het abstractieniveau van het examen te hoog voor leerlingen die niet ook wiskunde B in hun pakket hebben.
In enige opgaven constateerde men een stapeling in de onderdelen.
Een aantal docenten vindt dat er geen punten per vraag mogen worden vermeld. De achtergrond hiervan is dat kandidaten bij eenvoudige vragen met relatief veel punten gaan twijfelen en er iets achter gaan zoeken.
In enige regio's wordt de vermelding van de nauwkeurigheid bij gevraagde antwoorden gemist.
Wederom vraagt men om duidelijkheid over 'bereken', 'toon aan' en 'geef uitleg'.
In één regio was men van mening dat het lineair programmeringsprobleem, hoewel de kandidaten stap-voor-stap begeleid werden, eigenlijk te moeilijk was.
De formulering van vraag 18 vond men bijzonder ingewikkeld.
Eén van de verslagen eindigt met de daar allesoverheersende vraag: Waarom moet wiskunde op alle fronten zo moeilijk zijn? Is dat vooropgezette politiek? Is de omvang van de stof niet te groot? Met welk percentage onvoldoendes nemen wij genoegen?

Vwo wiskunde B

Zoals uit de antwoorden op de over het examen gestelde vragen reeds blijkt, vond men het niveau hoger dan vorig jaar, het aantal routinevragen te klein, het aantal originele opgaven te groot, het startvraagstuk slecht en de omvang van het werk te veel.

De samenvatting van de regionale bijeenkomst te Tilburg begint met: Alle aanwezige docenten waren zeer aangeslagen en verbolgen. Men kon op geen enkele manier begrijpen, hoe een eindexamencommissie een dergelijk examen wiskunde B vwo heeft kunnen samenstellen. Diverse docenten die het werk reeds hadden gecorrigeerd, kwamen op een gemiddelde uit dat twee of meer gehele punten onder het schoolonderzoekgemiddelde lag. De voltallige vergadering was van oordeel dat, welke aanpassing van de cesuur men ook gaat hanteren, de schade die door dit onacceptabele examen de leerling is toegebracht onmogelijk in zijn geheel kan worden hersteld.

Het verslag van de regionale bijeenkomst te Den Haag geeft de volgende analyse:
Algemeen:
- het was zeer origineel werk en voor de leerlingen niet herkenbaar.
- het onderwijs is nog sterk algoritmisch; dit examen stoelt voor een groot deel op inzicht en sluit dus totaal niet aan.
- het is niet eerlijk om vooruitlopend op ontwikkelingen een bepaalde richting in onderwijsvernieuwing op deze manier via een examen te sturen over de ruggen van de leerlingen en docenten heen.
- een examen is geen olympiade, het moet ook mogelijk zijn dat leerlingen laten zien wat ze geleerd hebben.
- de gebruikte methoden sluiten niet aan op dit examen, de leerlingen waren hier niet op voorbereid.

Opbouw:
- door de eerste opgave zijn de leerlingen ontmoedigd en gedesoriënteerd geraakt, zodat ze in de rest minder presteren.
- de laatste opgave was voor veel leerlingen wel te doen geweest, maar door het voorafgaande kwamen ze er niet aan toe.

Inhoud:
- een door velen opgemerkte ‘trend’ van de laatste jaren naar minder aandacht voor het berekenen van limieten (voor asymptoot plus limiet een gering aantal punten, voor limieten zonder zichtbaar resultaat in een asymptoot geen punten) werd plots doorbroken door veel aandacht aan het berekenen van limieten.

Normering:
- de normering was onevenwichtig; soms gedoe op de millimeter (vraag 3), soms (vraag 5) was een constatering zonder bewijs over ‘de’ symmetrie voldoende.

De aanwezigen op de regionale bijeenkomst in Rotterdam ‘uitten hun boosheid over het examen’ in een brief aan minister Ritzen met afschriften aan de CEVO, de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren, het Eindexamenjournaal en de Landelijke pers.
Men schrijft: Wij hebben het gevoel twee jaar voor niets aan het werk te zijn geweest en zien onze leerlingen de dupe worden van een volslagen miskleun van de examencommissie. Er werd gesproken van een schandelijke vertoning.
Enige opmerkingen over de afzonderlijke opgaven:
Opgave 1 is geen goede startopgave. Onderdeel 2 komt hierbij te vroeg, op een ‘vervelende’ manier en geeft bij een foutje aanleiding tot een onoplosbare vergelijking.
Opgave 2. Om de vraag 4 naar asymptoten volledig te beantwoorden waren 8 toelichtingen nodig; dit vond men te veel van het goede. Omdat er geen afspraken bestaan voor het tekenen van krommen, had men graag vóór vraag 5 een vraag gehad over de afgeleide.
Een leerling die bij vraag 5 niet alle takken van de kromme getekend heeft, kan vraag 6 eigenlijk niet beantwoorden. In heel opgave 2 vond men een te grote stapeling plaats hebben.
In **opgave 3** vonden sommigen de vragen 9 en 11 te moeilijk en ook vond men dat er te veel limietberekeningen in het examen voorkwamen.
Opgave 4 had men graag als opgave 1 gezien. Men had graag gezien dat het assenstelsel in het begin van de opgave gegeven was.

Een steeds weer rijzend probleem is wat er bij een toelichting moet staan. Ook is niet altijd duidelijk wanneer een exact antwoord en wanneer een benadering is vereist. Aan de CEVO wordt verzocht bij ruimtemeetkunde altijd een werkblad te geven, al is het maar voor de kandidaten om een beetje in de plaatjes te tekenen om greep op de situatie te krijgen.
Hiernaast wordt een zeer dringend beroep gedaan de kandidaten door middel van een standaardvraagstuk zelfvertrouwen te geven en de gelegenheid te bieden om te laten zien wat ze kunnen.

Havo wiskunde A

In de diverse regio’s wordt zeer verschillend op het examen gereageerd. Terwijl sommige verslagen spreken over een mild oordeel en tevredenheid bij de docenten, noemen andere verslagen het examen meer een intelligentietest dan een havo A-examen.
Er is kritiek op een ingewikkeld taalgebruik. Sommige stukken zijn

onleesbaar voor allochtone leerlingen.
Men vindt dat leerboeken de leerlingen maar matig op het examen voorbereiden.
Er is kritiek op en er zijn vragen over algemene regel 5 van het correctievoorschrift. Als een kandidaat in een onderdeel een fout maakt en hij rekent in een volgend onderdeel met het foute antwoord door, moet dat opnieuw fout gerekend worden?
Wederom worden dit jaar vragen gesteld over de begrippen ‘bereken’, ‘benader’ en ‘geef een toelichting’.
In het examen miste men de normale verdeling en de statistiek.
Sommigen vonden de vragen 6, 7 en 8 teveel stapelvragen.
Vraag 10 behoorde volgens sommige regio’s niet in een havo-examen thuis.
In de vragen 11, 12 en 13 werden veel punten uitgeloofd voor steeds dezelfde acties.
Vraag 14 zag men als lastige binnenkomer van opgave 4.
Opgave 5 werd als eenzijdig aangemerkt. Veel leerlingen scoorden slecht omdat ze het niet begrepen. Vooral de overstap naar meer machines vond men onduidelijk verwoord.

Havo wiskunde B

Van de verslagen van de bijeenkomsten begint er één met: Uiteraard werden er door de aanwezige examinatoren ook positieve opmerkingen gemaakt: het werk werd o.m. redelijk, verrassend, leuk en aardig genoemd; maar bij het merendeel overheerste de kritiek.
Een ander verslag begint met: Hier geen opstand, maar verslagenheid, vertwijfeling, galgehumor, maar toch ook de oprechte vraag hoe je leerlingen kunt voorbereiden op dit soort examens. Het programma is overvol, sommigen moeten met 2 keer 4 uur toekomen. Dan is er weinig tijd om te oefenen in creatieve aanpak, ingaan op dwarsverbanden door de stof heen, een bepaalde vrijheid van omgaan met het geleerde. Veel tijd ging ook zitten in het lezen van de tekst, wat in de boeken veel minder gebeurt. Allochtone leerlingen werden op grote achterstand gezet.
Een bloemlezing uit de verslagen levert onder andere op:
te veel; te moeilijk; te veel stapeling; te weinig standaardvragen en vaardigheden; te veel tekst; een meisjesonvriendelijk examen; op zo’n examen zijn leerlingen niet te trainen; leerlingen met natuurkunde in het pakket zijn in het voordeel; de vereiste *wiskundige* vaardigheden liggen nauwelijks boven het niveau van havo 4; goed lezen is belangrijk; wiskunde B wordt te elitair; gebruikte boeken sluiten niet aan op dit type examen; streven de examenopstellers naar een gemiddelde van 6?
Ook stelt men: Op deze voet moeten we echt niet verder, zo wordt een mooi vak om zeep geholpen en dit soort examens is een ramp voor de doorsnee hardwerkende leerling die het in het HBO ver kan schoppen.
Hiernaast vraagt men duidelijkheid over formuleringen en afrondingen. Wederom vraagt men om *‘bereken in graden nauwkeurig’* te vervangen door *‘bereken in gehele graden’* of door *‘bereken . . .; rond het antwoord af op gehele graden’*. Ook *‘licht je antwoord toe’* vraagt om verduidelijking.
In een regio uitte een aantal aanwezigen kritiek op ‘kruidenierspunten’; de puntenaftrek die plaats vindt wanneer leerlingen vergeten af te ronden naar het gevraagde niveau van significantie, -correcte-benaderingen van wortelgetallen, breuken etcetera. Van een iets lager kruideniersgehalte noemde men kwesties als randextrema bij de grafiek van functies die worden gevraagd te tekenen op een beperkt gebied van het domein, open rondjes bij discontinuïteiten en andere formeeltechnische afspraken.
In één regio vroeg men zich af wat het voor zin heeft om opmerkingen te maken als men ervaart weinig terug te zien van opmerkingen van vorige jaren.

Betreffende de opgaven merkte men nog op dat **opgave 1** een slecht startvraagstuk was dat redactioneel heel slecht was en te vwo-achtig.
Bij **opgave 3** vindt men dat leerlingen met natuurkunde te veel in het voordeel zijn en hebben vele regio’s problemen met een keer wel en een keer geen punt tussen 10 en log.
Van **opgave 4** vindt men de presentatie te moeilijk.

Noot

* Bij de analyse van de resultaten is het erg belangrijk te weten of een formulier uit de steekproef hoort bij een kandidaat uit de groep A-sec, de groep A + natuurkunde of de groep A + wiskunde B. Helaas werden deze gegevens dit jaar slecht ingevuld door de collega’s. Volgend jaar beter?

Enige algemene gegevens van de examens.

	vwo-A	vwo-B	havo-A	havo-B
aantal kandidaten	23700	16200	27900	14900
gemiddelde score	56	50	56	50
standaarddeviatie	16	16	15	15
betrouwbaarheid	83	79	77	80
cesuur	50/51	44/45	50/51	46/47
percentage onvoldoenden	39	40	36	41
gemiddeld cijfer	6,0	6,0	6,0	5,8

Tabel 1

p′ - waarde van de afzonderlijke vragen van de examens.

vraag	vwo-A	vwo-B	havo-A	havo-B
1	90	53	76	67
2	41	45	62	54
3	80	44	55	45
4	64	71	69	46
5	43	65	51	34
6	48	44	74	63
7	17	38	84	67
8	67	34	29	64
9	88	52	71	39
10	56	45	17	12
11	95	20	33	64
12	67	67	34	44
13	28	42	44	64
14	64	37	14	66
15	15	22	86	45
16	39	–	75	36
17	58	–	57	14
18	15	–	40	19
19	–	–	42	14
20			15	

N.B. De p′ -waarde van een vraag is de gemiddelde score, uitgedrukt in procenten van de maximum score van die vraag.

Tabel 2

	vwo-A	vwo-B	havo-A	havo-B
in vergelijking tot vorig jaar is het niveau van het CSE 1995				
lager	0%	0%	3%	0%
gelijk	50%	8%	58%	14%
hoger	50%	92%	39%	86%
de spreiding over de stof is				
slecht	38%	29%	58%	14%
voldoende	56%	64%	39%	80%
goed	6%	6%	3%	6%
het aantal routinevragen is				
te klein	45%	94%	59%	90%
goed	54%	6%	41%	10%
te groot	1%	0%	0%	0%
het aantal originele opgaven is				
te klein	0%	0%	0%	2%
goed	72%	20%	67%	31%
te groot	28%	80%	33%	67%
het correctievoorschrift is				
te gedetailleerd	2%	3%	1%	14%
goed	91%	71%	95%	71%
te weinig gedet.	7%	26%	4%	14%
de keuze van het startvraagstuk is				
slecht	0%	94%	3%	69%
matig	14%	6%	23%	25%
goed	86%	0%	74%	6%
de leesbaarheid van de vraagstukken is in het algemeen				
slecht	31%	2%	46%	18%
voldoende	66%	83%	50%	72%
goed	3%	15%	4%	10%
de omvang van het CSE 1995 was				
te gering	0%	0%	0%	0%
goed	31%	10%	83%	4%
te veel	69%	90%	17%	96%

De percentages zijn berekend over het aantal aanwezigen dat een keuze deed.

Tabel 3

OPROEP

De huidige hoofdredacteur heeft aangegeven met ingang van (uiterlijk) 1 april 1996 te willen stoppen.
Welke collega heeft de energie, het verantwoordelijkheidsgevoel en de durf om zijn werk over te nemen, en daardoor een belangrijke bijdrage te leveren aan het mooie vakblad Euclides?

Het bestuur van de Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren (NVvW) en de redactie van Euclides roepen geïnteresserde collega's op te solliciteren naar de functie van

Hoofdredacteur (m/v)

Gezocht wordt iemand die zoveel mogelijk voldoet aan het volgende profiel:
- thuis in het wiskundeonderwijs, op de hoogte met de basisvorming, met plannen voor het mavo/vbo en voor de bovenbouw van het vwo/havo, en op de hoogte met nieuwe programma's.
- in staat ontwikkelingen kritisch te volgen.
- in staat en bereid auteurs te werven voor het schrijven van artikelen.
- in staat een beoordeling van artikelen te geven na raadpleging van mede-redactieleden, en daarover met auteurs van gedachten te wisselen.
- in staat planmatig te werken en zorgvuldig deadlines aan te houden.
- bereid om te werken binnen de afspraken die zijn vastgelegd in een redactiestatuut, in het bijzonder bereid tot samenwerking met de eindredacteur en de voorzitter van de redactie.
- het liefst met schrijfervaring, en in staat redactionele bijdragen te schrijven.
- beschikkend over goede leidinggevende en contactuele eigenschappen.

Het werk van de hoofdredacteur is onbezoldigd. Kosten worden vergoed.
Een indicatie voor de benodigde tijd voor het hoofdredactionele werk, inclusief organisatie, is: gemiddeld ongeveer 2 dagdelen per week.
In het redactiestatuut zijn vastgelegd de taak van de hoofdredacteur, de taken van de overige redactieleden, de werkwijze van de redactie, en de relatie van de redactie met het bestuur van de NVvW. Belangstellenden kunnen het statuut opvragen bij de huidige hoofdredacteur, Martinus van Hoorn, telefoon (privé) 0596 629523, die tevens beschikbaar is om nadere inlichtingen te geven.

De benoeming vindt plaats door het bestuur van de NVvW, op advies van een sollicitatiecommissie, bestaande uit twee leden van het bestuur van de NVvW en drie leden van de redactie van Euclides.

Brieven dienen te worden gericht aan de voorzitter van de redactie,
Bert Zwaneveld, Bieslanderweg 18, 6213 AJ Maastricht.

De inzendtermijn sluit op 15 november 1995.

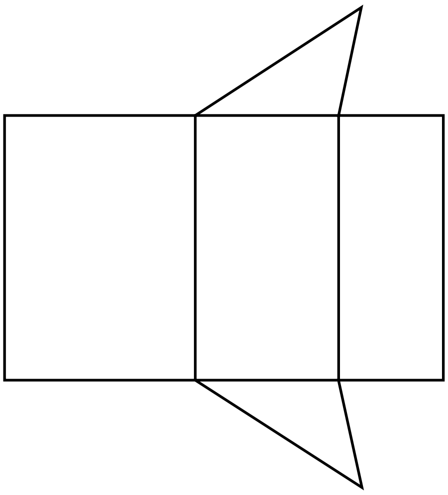
EUCLIDES

De uitslag van een scheef driezijdig prisma

Leon van den Broek

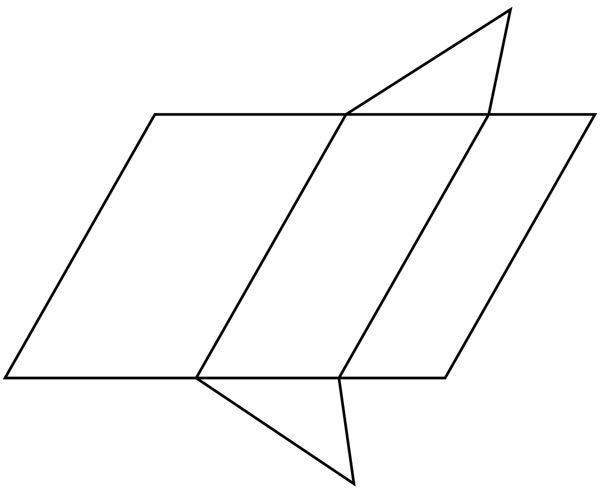
Het probleem

In het Hawex-boek Verkenning in de ruimte voor havo 4 wiskunde B wordt de leerlingen gevraagd een uitslag te maken van een recht driezijdig prisma. Dat geeft geen enkel probleem: zie figuur 1a.



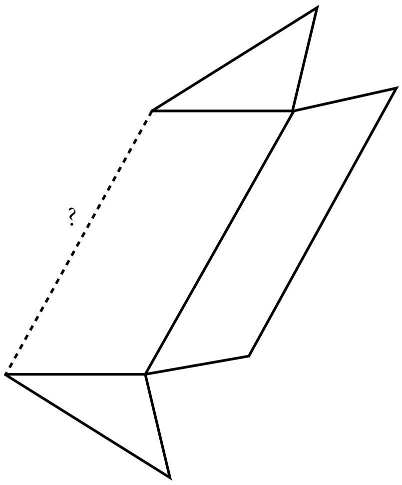
figuur 1a

Vervolgens wordt gevraagd een uitslag te maken van een scheef driezijdig prisma. Marcel geeft als 'oplossing' de uitslag in figuur 1b.



figuur 1b

Hij vindt het niet nodig om – zoals de opdracht luidde – experimenteel vast te stellen of de uitslag wel passend tot een driezijdig prisma is te vouwen. Hier blijkt dat goedgelovigheid in de meetkunde gevaarlijk is.
Ik heb hier over doorgedacht: hoe kun je, zonder daadwerkelijk te vouwen, een uitslag van een 'willekeurig' scheef driezijdig prisma maken ? Stel bijvoorbeeld dat je begint met twee congruente driehoeken (het grond- en bovenvlak) en twee passende parallellogrammen (twee zijvlakken): zie figuur 2.

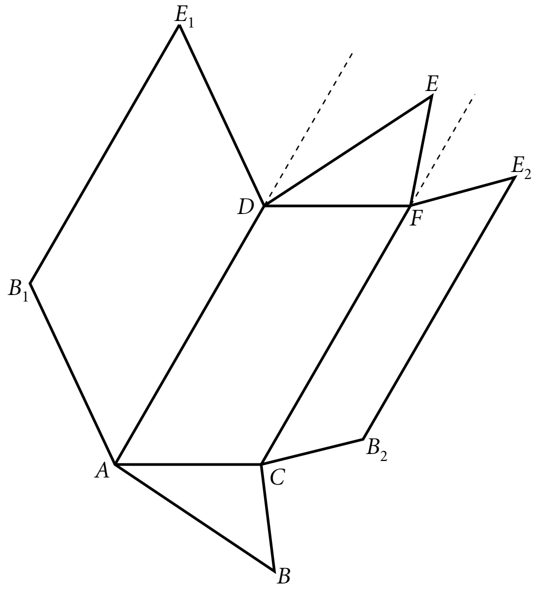


figuur 2

Hoe moet je nu het derde parallellogram toevoegen (grenzend aan de onderbroken zijde)? Is het trouwens wel zeker dat je een begin als in figuur 2 kunt voltooien met het derde zijvlak? Zo ja, kun je dan ook – uitgaande van de maten van de reeds bekende grensvlakken – berekenen wat de hoeken van het derde parallellogram moeten worden ?

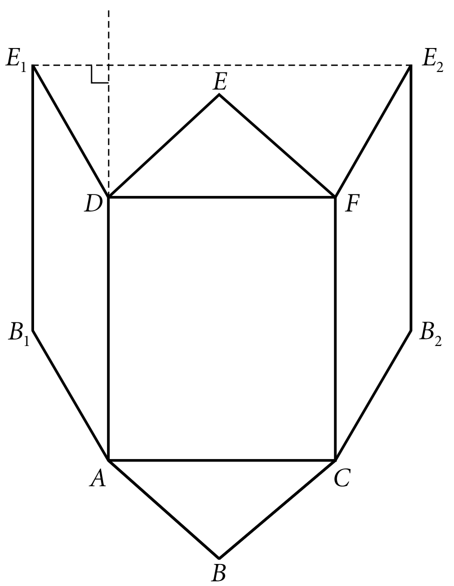
Meetkundig opgelost

In figuur 3 heb ik het begin van figuur 2 voltooid met het derde parallellogram. Ik heb de hoekpunten van namen voorzien.



figuur 3

De drie parallellogrammen passen aan de congruente driehoeken, dus $DE_1 = DE = AB = AB_1$ en $FE_2 = FE = CB = CB_2$. We nemen het parallellogram *ACFD* vast en vouwen de uitslag dicht. Bij het dichtvouwen beschrijft hoekpunt E_1 een cirkelvormige baan om (het verlengde van) vouwlijn *AD*; de cirkel ligt dus in een vlak dat loodrecht staat op *AD*. Evenzo beschrijft hoekpunt E_2 een cirkelvormige baan om vouwlijn *CF*. Bij een goede uitslag moeten de hoekpunten E_1 en E_2 op elkaar komen. Noodzakelijk is daarvoor dat de cirkelvormige banen in één vlak liggen. Daarvoor moet de lijn E_1E_2 loodrecht staan op de ribben *AD* en *CF*.
In figuur 3 is dat niet het geval.
De voorwaarde is niet voldoende: als E_1E_2 in de uitslag loodrecht staat op de opstaande ribben, hoeft de uitslag nog geen prisma op te leveren. Zie het voorbeeld in



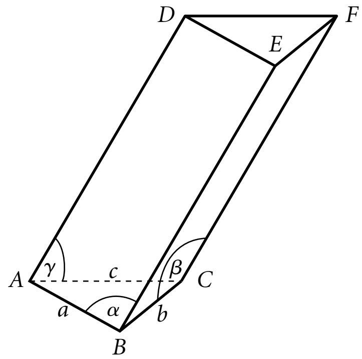
figuur 4

figuur 4: de parallellogrammen AB_1E_1D en CB_2E_2F zijn te smal, zodat de cirkelvormige banen van E_1 en E_2 elkaar niet ontmoeten als we de uitslag dichtvouwen.

We weten nu genoeg om wel goede uitslagen voor een scheef driezijdig prisma te maken.

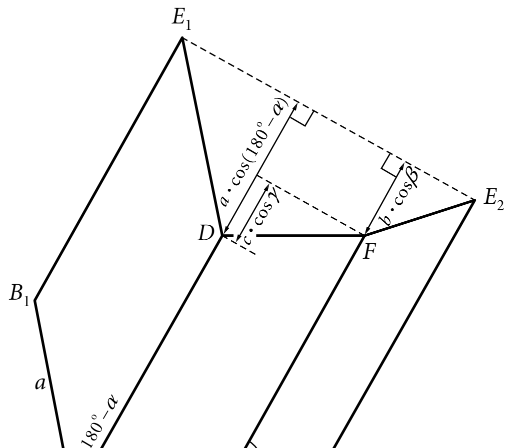
Een fraaie symmetrische formule

In figuur 5a staat een driezijdig prisma. De zijden van het grondvlak zijn *a*, *b* en *c*. De parallellogrammen van de mantel hebben zes hoeken waarmee ze aan grondvlak *ACB* grenzen.



figuur 5a

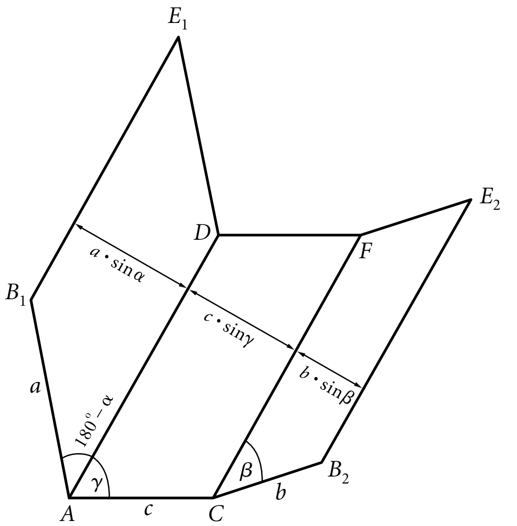
Als je vanaf *B* rond driehoek *ACB* loopt, krijg je achtereenvolgens de hoeken: α, $180° - \alpha$, γ, $180° - \gamma$, β en $180° - \beta$.



figuur 5b

De uitslag van de mantel van het prisma (figuur 5b) is correct: E_1E_2 staat loodrecht op *AD* en *BC*. In de uitslag heb ik $180° - \alpha$, β, en γ aangegeven. Omdat de lijn E_1E_2 loodrecht staat op *AD* volgt dat (zie de pijltjes in figuur 5b):
$b \cdot \cos\beta + c \cdot \cos\gamma = a \cdot \cos(180°-\alpha)$, ofwel
$a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\beta + c \cdot \cos\gamma = 0$.

En deze fraaie formule is niet afhankelijk van de toevallige uitslag in figuur 5b, maar geldt algemeen. Je hoeft er alleen maar op te letten dat je de hoeken α, β, en γ steeds aan dezelfde kant van de zijden *a, b* en *c* neemt, dus consequent links of consequent rechts.
Met de formule kunnen we γ uitrekenen, als *a, b, c,* α en β bekend zijn.
Zoals opgemerkt is de formule niet voldoende om het prisma realiseerbaar te maken. Daarvoor is bovendien nodig dat bij het vouwen het lichaam sluitend wordt: de breedten van de drie parallellogrammen – dat zijn $a \cdot \sin\alpha$, $b \cdot \sin\beta$ *en* $c \cdot \sin\gamma$ (zie figuur 6) – moeten aan de driehoeksongelijkheid voldoen.



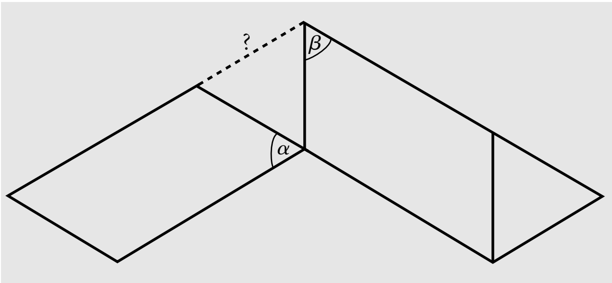
figuur 6

Samengevat:
Laat *a, b, c,* α, β, en γ zijn als hierboven.
De uitslag is die van een prisma dan en alleen dan als
1) $a \cdot \cos\alpha + b \cdot \cos\beta + c \cdot \cos\gamma = 0$ en
2) $a \cdot \sin\alpha$, $b \cdot \sin\beta$ *en* $c \cdot \sin\gamma$ voldoen aan de driehoeksongelijkheid.

Discussie

Stel dat we een driehoek met zijden *a, b* en *c* als grondvlak gegeven hebben en dat van de mantel twee parallellogrammen met hoeken α en β gegeven zijn (naamgeving zoals in het voorgaande). Is het dan altijd mogelijk dit gegeven met een passend derde parallellogram af te maken tot een uitslag van een prisma?
Als de hoeken α en β beide recht zijn, dan moet volgens 1) de derde hoek γ ook recht zijn. Dan kan het gegeven dus altijd afgemaakt worden tot een uitslag van een realiseerbaar (recht) prisma. Maar dat wisten we al!
Als α en β niet beide recht zijn, kan het gegeven niet altijd afgemaakt worden tot de uitslag van een realiseerbaar prisma.
Immers, als $a/c \cdot \cos\alpha + b/c \cdot \cos\beta \leq -1$ of $a/c \cdot \cos\alpha + b/c \cdot \cos\beta \geq 1$ zou volgens 1) $\cos\gamma \leq -1$ of $\cos\gamma \geq 1$ zijn.

Een voorbeeld waarbij de uitslag net niet meer afgemaakt kan worden staat in figuur 7: het grondvlak is gelijkzijdig en $\alpha = \beta = 60°$. Aan de onderbroken zijde moet nog een parallellogram komen. Probeer het prisma in gedachten in elkaar te vouwen. Kunt u zich indenken hoe het 'lichaam' eruit zal gaan zien? Of hebt u net als ik papier en schaar nodig?



figuur 7

Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren

Inhoud

Verslag van het verenigingsjaar 1 augustus 1994 - 31 juli 1995

Het bestuur was dit jaar als volgt samengesteld:

dr. J. van Lint, *voorzitter*
drs. J.W. Maassen, *secretaris*
(tot 12 november 1994)
R.J. Bloem, *secretaris*
(in deze funktie vanaf 12 november 1994)
drs. S. Garst, *penningmeester*

overige leden
mevr. A.F.S. Aukema-Schepel
J.J. Breeman
R.J. Jongeling
mevr. drs. M. Kollenveld
W. Kuipers
(vanaf 12 november 1994)
F.J. Mahieu
S.H. Schaafsma

Op zaterdag 12 november 1994 werd de jaarvergadering gehouden te Bilthoven. Tijdens deze jaarvergadering moesten wij afscheid nemen van Jan Maassen, als bestuurslid van de NVvW. Jan Maassen is 25 jaar bestuurlid geweest, heeft op velerlei wijzen zijn bijdrage geleverd aan de ontwikkeling van het wiskunde-onderwijs en is als secretaris van het bestuur vaak de drijvende kracht gebleken. Tijdens de jaarvergadering werd Jan Maassen door dhr. mr. A. Tchernoff, burgemeester van de gemeente De Bilt, onderscheiden tot Ridder in de Orde van Oranje-Nassau; de ledenvergadering van de NVvW had Jan Maassen voor het uitreiken van deze onderscheiding reeds per acclamatie uitgeroepen tot erelid van onze vereniging.

De jaarvergadering werd ook dit jaar gecombineerd met een studiedag, waarvan het thema was: ‘Van exploreren naar bewijzen’. In jaargang 70 van Euclides is reeds een verslag verschenen van de studiedag. De deelnemers aan de studiedag hebben van iedere werkgroep en van de openingslezing een uitvoerige beschrijving ontvangen. De openingslezing werd verzorgd door dr. Anne van Streun, de middaglezing werd verzorgd door prof. dr. Floris Takens. Naast de plenaire gedeelten was er twee keer de gelegenheid deel te nemen aan een workshop.

In oktober 1994 verscheen het rapport van de Studiecommissie Wiskunde B vwo. In het rapport worden aanbevelingen gedaan aangaande het examenprogramma, alsmede aangaande de opleiding van docenten in het eerstegraads gebied. De aanbevelingen in het rapport betreffende het examenprogramma waren vergaand en lijken te weinig rekening te houden met leerlingen die geen wiskunde of aanverwante opleiding gaan studeren. Uit de aanbevelingen betreffende de opleidingen van eerstegraads leraren blijkt een, nauwelijks onderbouwde, voorkeur voor universitair opgeleide leraren.

In februari 1995 zijn door de vereniging in Rotterdam, Zwolle, Amsterdam en Eindhoven regionale bijeenkomsten georganiseerd. De deelnemers konden (zoals langzamerhand gebruikelijk is) kiezen uit twee workshops.

In mei 1995 werden voor de diverse schoolsoorten (vbo/mavo C/D, havo A/B, en vwo A/B) eindexamenbesprekingen gehouden. Met de meningen van de docenten, zoals die uit de verslagen blijken, is niet alleen bij de cesuurbepaling, maar ook met betrekking tot het vaststellen van examenonderwerpen in de eerstkomende jaren terdege rekening gehouden. Er was rondom de wiskunde B-examens voor havo en met name vwo veel commotie. Mede op aandringen van het bestuur van de NVvW zullen enkele examenonderwerpen uit het vwo B-programma in de komende jaren niet getoetst worden (partieel integreren, lijnelementenvelden, differentiaalvergelijkingen; zie verder Euclides 71-1, bladzijde 36), zodat in 5/6 vwoB meer tijd beschikbaar komt voor het aanbrengen van probleemoplossende vaardigheden.

Met het PMB zijn in het afgelopen verenigingsjaar gesprekken geweest over de basisvorming en (met name) de afsluiting daarvan. Ook met de COB/CEVO is het bestuur in contact getreden om haar zorgen omtrent de afsluiting van de basisvorming kenbaar te maken. Ofschoon bij het schrijven van dit jaarverslag nog niet duidelijk is hoe met onze commentaren op de eindtoetsen basisvorming zal worden omgegaan, vermoeden wij een positieve invloed te hebben gehad op organisatie en uitvoering van de eindtoetsen.

Naar aanleiding van de rapporten van de Stuurgroep 2e fase V.O. zijn voor alle vakken (en dus ook voor wiskunde) zogenaamde vakontwikkelgroepen (VOG's) samengesteld. Twee bestuursleden van de NVvW maakten deel uit van de VOG-wiskunde: Marian Kollenveld en Jan Breeman. Het eindrapport van de VOG heeft in juli '95 het licht gezien. In september zal de veldraadpleging plaatsvinden, waarbij de NVvW ook een inbreng zal hebben. De NVvW heeft een eigen resonansgroep kunnen samenstellen, die het NVvW-bestuur zal adviseren met betrekking tot een standpuntbepaling over het VOG-rapport.

De Commissie Recht doen aan Verscheidenheid (van Veen) heeft in het verenigingsjaar haar rapport gepresenteerd. Het NVvW-bestuur heeft de 'nota van Veen' zorgvuldig bestudeerd en heeft bezorgd gereageerd vanwege het feit dat wordt voorgesteld in een aantal leerwegen wiskunde niet als examenvak op te nemen.

De NVvW is al geruime tijd deelnemer aan het Platform V.V.V.O. (waarin alle vakverenigingen van docenten in het V.O. zijn verenigd). Dankzij het Platform hebben de vakverenigingen een ingang op het ministerie van OC&W. Via het Platform wordt het NVvW-bestuur vaak vroegtijdig op de hoogte gesteld van nieuwe beleidsontwikkelingen. Het Platform V.V.V.O. wil een vereniging worden, waarvan de vakverenigingen dan de leden zouden zijn. Helaas heeft het NVvW-bestuur moeten besluiten vooralsnog niet te kunnen instemmen met het oprichten van een 'platform'-vereniging, vanwege de inhoud van een aantal onderdelen van het voorgestelde statuut.

In 1995 viert de NVvW op bescheiden wijze haar 14e lustrum. Voor alle leden heeft het bestuur nog een cadeau in petto.

De NVvW heeft zowel bij SLO als bij SVO weer onderzoeksaanvragen ingediend voor 1996. Van het SLO is inmiddels vernomen dat de aanvraag is toegekend.

Het NVvW is van zins een nieuw nomenclatuur-rapport te laten samenstellen. In verband daarmee is voor het vbo/mavo een nomenclatuur-verslag geschreven en verschenen. Het verslag is verspreid bij de examenbesprekingen.

Vanwege het feit dat Felix Gaillard te kennen heeft gegeven zijn functie als administrateur van de NVvW te willen neerleggen, heeft het NVvW-bestuur zich moeten bezinnen op een nieuwe constructie van verenigingsbureau. Felix Gaillard is voor de NVvW een welhaast onmisbare schakel en het zoeken van een vervanging is geen eenvoudige opdracht gebleken. Het NVvW-bestuur hoopt in het najaar van 1995 de opvolging van Felix Gaillard geregeld te hebben.

In de CEVO heeft de NVvW een kwaliteitszetel. Tot voor kort was Hans van Lint de NVvW-vertegenwoordiger in de CEVO. Vanwege het feit dat Hans van Lint gaat genieten van de VUT, zal Jan Breeman Hans opvolgen in de CEVO.

Het Derde-Wereld-Fonds van de NVvW lijkt een succes te worden. Veel leden hebben een bijdrage gestort in het fonds en de commissie Derde-Wereld-Fonds heeft naarstig gezocht naar bestemmingen voor de gelden; inmiddels is een bestemming voor de gelden van 1994-1995 gekozen: met de bijdrage van de leden wordt een school in Zambia voorzien van wiskundeboeken.

Het bestuur van de NVvW vergaderde dit jaar dertien keer. Op 12 oktober '94 heeft een delegatie van het NVvW-bestuur vergaderd met een delegatie van het NVORWO-bestuur. Op 17 februari '95 heeft het bestuur vergaderd met de kernredactie van Euclides. Er is door het bestuur overleg gepleegd met de NOCW en met de inspectie op 21 juni '95.

EUCLIDES

Inhoud van de 70e jaargang 1994/1995

Computeralgebra en grafische rekenmachine

Een verslag met commentaar

Op 17 maart jl. was een deel van de '*wiskundemafia*' (zoals Jan de Lange wel eens zegt) bijeen om van gedachten te wisselen over de vraag: hoe kan bij de wiskunde in de bovenbouw de computeralgebra en/of de grafische zakrekenmachine het best ingezet worden? Een initiatief van de SLO en het Freudenthal instituut.

Conclusie

En om maar meteen met mijn conclusie te komen: de verzamelde leerplanontwikkelaars, methodenauteurs, hooggeleerden, leraaropleiders en leden van de vakontwikkelgroep wisten het antwoord niet. Dat lijkt een probleem: als zij het niet weten, wat moet de man of vrouw voor de klas dan? Een van de twee leraren die met steun van het Freudenthal instituut heeft geëxperimenteerd, gaf impliciet het antwoord. Het biedt voor wie durft en van de school mag investeren de mogelijkheid om een ander pad in te slaan. Ondanks de druk ook het gewone programma te moeten afwerken dùrfde die docent. Een aantal wiskundige vragen stellen op een proefwerk waarvan iemand wel eens droomt, maar die onmiddellijk als veel te moeilijk verworpen worden. En in datzelfde proefwerk een wat lastiger context aanbieden en daaraan laten rekenen. En bij de beantwoording vooral letten op de toelichting.

Stellingen en commentaar

Hadden de verzamelde deskundigen dan helemaal niets in te brengen? Natuurlijk wel.
Zo werd de volgende stelling met vuur en overtuigend verdedigd: als het bij knoppen drukken blijft ten koste van redeneren – toch de essentie van wiskunde – laat die technische hulpjes dan maar achterwege. De kanttekening van de betreffende inleider dat naar zijn ervaring door het gebruiken van moderne technische hulpmiddelen ook de inhoud van het wiskundeprogramma ter discussie komt ('*die inhoud is immers tot stand gekomen om allerlei handmatige berekeningen te vereenvoudigen toen er nog geen computers waren voor die berekeningen*') laat ik hier voor zijn rekening. Maar dit is een deel van het verhaal. Inderdaad, veel oefenen op toe-recht-toe-aan technieken zoals differentiëren van ingewikkelde functies, primitiveren met partiëel integreren en standaardsubstituties is niet zinvol meer. Maar er komen andere handigheidjes voor in de plaats: substitutie maakt soms dat een computeralgebra iets wat eerst niet lukte, dan wel kan uitrekenen.
Ook de volgende stelling kan onderschreven worden: het gaat in de vierde klas om het zorgvuldig opbouwen van correcte wiskundige begrippen, dat moet centraal staan en de techniek kan daar soms bij helpen.
Als blijkt dat dit wordt toegepast in de vorm van differentierekening als voorbereiding op de differentiaalrekening, dan bekruipt mij enige twijfel. Ik ben zeker voor aandacht voor rijen en reeksen. Maar dan niet alleen voor rekenkundige en meetkundige rijen.
Waar iets voor te zeggen valt is dat de techniek het werk van de docent kan ondersteunen: gegevensbanken die helpen bij het construeren van toetsen en voorbeeldlessen op interactieve video lijken op zich goede gedachten, maar staan nog ver van de docentenpraktijk af. Hoewel …, ook hier geldt: wie het wil, moet het vooral gaan gebruiken op basis van eigen ideeën.
Eveneens in de categorie goede gedachte/twijfelachtige uitvoering viel het volgende. In de toekomst gaan leerlingen meer zelfstandig leren en werken binnen de wiskunde, krijgen dan grotere huiswerkopgaven die opener en moeilijker zijn. Er is dan behoefte aan extra hulpmiddelen: niet alleen de genoemde, maar bijvoorbeeld ook internet en worldwideweb. De voorbeelden, wat is er met $(\sin x)^x$ aan de hand en met x^n in de buurt van 1, als n tot oneindig nadert (op het scherm lijkt het of er een verticale asymptoot bij 1 is, want de steilheid in 1 is gelijk aan n), op een moment dat de leerlingen nauwelijk iets van machten of van asymptoten weten, maakten de aanwezigen niet enthousiast.

DERIVE en integraalrekening

Wat was er verder nog te leren? Een pakket als DERIVE kan gebruikt worden als een middel om mooie wiskundige gedachten te illustreren. Het numeriek integreren met de trapeziumregel is een idee dat leerlingen heel goed kunnen volgen, maar dat op het bord bewerkelijk is om uit leggen. En dat je vervolgens een betere benadering krijgt door de trapezia steeds smaller te maken, kan DERIVE mooi meenemen. Je kunt zelfs de limiet exact door DERIVE laten bepalen. Maar ik denk dat ongeveer zo de integraalrekening vaak ingeleid wordt zonder dat daar een computeralgebra bij gebruikt wordt, en dat na een paar lessen elke leerling via *primitiveren* de uitkomst exact kan bepalen. Misschien komt het 'èchter' over met DERIVE.
Het voordeel van zo'n introductie met DERIVE is dat vanaf het begin het numeriek integreren de plaats krijgt die het heeft: in de praktijk is het vrijwel de enige methode. Zeker zo belangrijk is dat door het gebruik van een computeralgebra langer bij het *begrip* integraal kan worden stilgestaan.

Een grafiekenpakket

Een vraag die terecht aan de orde werd gesteld was de volgende: is er

naast de computeralgebra en de grafische zakrekenmachine nog behoefte aan een educatief grafiekenpakket? Een ontwerper van zo'n pakket stelde de vraag en gaf een beredeneerd bevestigend antwoord: in het Nederlandse wiskundeonderwijs worden een tabel, een grafiek en een functie als drie aspecten van hetzelfde begrip gezien. In de computeralgebra en de grafische zakrekenmachine zit dat niet, want die zijn niet in Nederland ontworpen. Om deze en dergelijke didactische gedachten te ondersteunen blijft er een behoefte aan dit soort software. Zulke gedachten waren in dit verband: de al genoemde differentierekening, en de dynamiek in het begrip afgeleide/hellingfunctie. Hiervoor is natuurlijk geen grafiekenprogramma nodig. Ook dit kan zeker zo goed door de leraar op het bord worden uitgelegd. En weer geldt: niet te snel op het trucmatig uitrekenen overstappen.

Tot slot

Naar mijn oordeel bleef het volgende onderbelicht.
De technische hulpmiddelen zijn vrijwel allemaal ontwikkeld om iemand die de essentie van de gebruikte wiskunde snapt, het vervelende en vaak tot allerlei rekenfoutjes leidende rekenwerk uit handen te nemen.
Natuurlijk kan een hulpmiddel anders worden gebruikt dan waarvoor het is ontwikkeld, maar daarmee moet je beslist oppassen. Bij een nieuwe versie gaat soms datgene wat je bedacht had, niet meer, omdat de nieuwe versie op iets heel anders gericht was. Dit soort zaken had meer aandacht mogen krijgen.

Bert Zwaneveld

Noot

Met dank aan Agnes Verweij voor haar commentaar en waardevolle aanvullingen.

Mededeling

Introductiecursus APS

Voor wie?
Wiskundedocenten die weinig of geen ervaring hebben met de computer.
Deze cursus wordt nu gegeven in het kader van PRINT. In de afgelopen jaren werd deze cursus uitgevoerd door de Stichting Nascholing van de Universiteit van Amsterdam.

Inhoud

De computer moet, maar hoe? Velen die zich tot nu toe afzijdig hielden krijgen er nu toch mee te maken. Deze introductiecursus helpt u op weg.
We bekijken en beoordelen in een practicum een breed scala van programma's voor de basisvorming en voor de bovenbouw. Er wordt aangegeven welke software op welk moment geschikt is. Ter illustratie beschrijven we de situatie op het College De Klop in Utrecht.
Ook de praktische problemen komen aan de orde. Een computerles vraagt een goede planning en een goede organisatie. Een betrouwbaar netwerk bespaart de docent een hoop energie. Hoe bepaalt u of een programma geschikt is voor uw les? Computerprogramma's kosten geld, hoe kunt u de financiën regelen? Op al deze vragen wordt kort ingegaan.

Materiaal

Een overzicht van veel gebruikte programma's met prijzen en adressen van uitgevers.

Plaats en tijd

De cursus wordt vier keer uitgevoerd in Utrecht:
donderdag 30 november 1995,
dinsdag 16 januari 1996,
donderdag 15 februari 1996,
dinsdag 19 maart 1996,
steeds van 14.00 uur tot 17.00 uur.

Kosten

Deze cursus is gratis.

Informatiepunt wiskunde

tel: 030-2856722.

Mededeling

Jaarvergadering/Studiedag

Heeft u zich al opgegeven?

Zaterdag 11 november 1995
Jaarvergadering/Studiedag

Voor informatie zie Euclides jaargang 71 nummer 1, bladzijden 16 t/m 18 en bladzijde 72 van dit nummer.

Boekbespreking

Fred Goffree
Het Land van Okt
Instapmodule Wiskunde en Didactiek (48 blz.)
Wolters Noordhoff ISBN 9001 34671 5
Onderdeel van de serie Wiskunde en Didactiek waarvan inmiddels ook de delen 1 en 2 zijn herdrukt.

Voor bijna een generatie leerkrachten in het basisonderwijs is het *Land van Okt* een blijvende herinnering. Voor hen betekent het waarschijnlijk een vorm van opnieuw leren rekenen en een eerste kennismaking met didactiek. Zij kennen het als hoofdstuk 1 uit deel 1 van de serie *Wiskunde en Didactiek*, die deel uitmaakt van veel boekenlijsten van pabo's in Nederland. Nu als apart boekje uitgegeven.

Het boekje heeft als voornaamste doel de lezer rekenproblemen te laten ervaren op het niveau van die op basisscholen en daarover te leren nadenken en praten. Daartoe moet alle kennis van het tientallig stelsel het raam uit om een goed inleven in het *Land van Okt* mogelijk te maken en het leren vergelijkbaar te laten zijn met dat van kinderen. Dat begint dus met tellen, namen van getallen leren en heel veel activiteiten om dit te ondersteunen.

Op bladzijde 20 pas komt het rekenen, dat doorgaat tot cijferen, tot en met staartdelen. Een uitgebreide terugblik volgt. Daarin staan de begrippen didactiek en reflecteren centraal, die beide met voorbeelden uit het voorgaande leren worden toegelicht.
De oorspronkelijke tekst is niet veranderd. Er is slechts een zelftoets met oplossingen en een register, hier didactisch woordenboek geheten, aan toegevoegd, op dezelfde manier als in de andere nieuwe drukken in de serie.
Het boekje toont tussen neus en lippen door dat rekenen (al lang) niet meer is wat de meesten van ons zich ervan herinneren. Alleen bladeren geeft al een beeld van veel variatie en realiteit.
Het *Land van Okt* kan een uitstekend begin zijn voor het denken en praten over wiskundeonderwijs. Ook op opleidingen voor wiskundeleraren is het bruikbaar en levert het studenten een indringende en zinvolle ervaring en start.
Mogelijk heeft ook een ervaren leraar wiskunde een avond plezier met het *doen* van dit boekje. Met het lezen ervan waarschijnlijk geen.

Frans Ballering

Mededeling

VIERKANT wiskundeclubs
In het schooljaar 1995/96 zullen er drie VIERKANT wiskundeclubs zijn. Op de clubmiddagen worden interessante opdrachten van verschillende, in de schoolcurricula niet voorkomende, wiskundegebieden behandeld. De clubs zijn open voor alle middelbare scholieren. Leerlingen van andere scholen zijn ook welkom!

De locaties en de clubleiders zijn:
Hermann Wesselink College
in Amstelveen, Startbaan 3
contactpersoon:
Dhr. C. Buissant des Amorie
tel: 020-6459751

Amsterdams Lyceum in
Amsterdam, Valeriusplein 15
contactpersoon: Dhr. J. Colle
tel: 020-6627790

Gymnasium Celeanum te
Zwolle, Veerallee 30
contactpersoon:
Mevr. G. de Vries-Lukkien
tel: 038-4223722

Voor informatie over tijden en programma op de verschillende locaties kunt u de clubleiders bellen. Mocht u ook een locale club willen beginnen op uw school, of wilt u materiaal voor enkele leerlingen om schriftelijk mee te doen, neem dan contact op met het VIERKANT kantoor:

Dr. Zsófia Ruttkay
VIERKANT *directrice*
p/a Fac. Wiskunde en Informatica, Vrije Universiteit
De Boelelaan 1081a
1081 HV Amsterdam
tel: 020-4447776

Richtlijnen voor auteurs

Aanleveren
Kopij dient bij voorkeur te worden aangeleverd op een diskette (3,5 of 5,25 inch) in WP5.1 (MS-DOS) of ASCII-bestand. Gedrukte of geschreven kopij kan vertraging opleveren. De tekst mag geen lay-out bevatten. De tekst moet zo kaal mogelijk worden aangeleverd, zonder woordafbrekingen e.d.; geef alinea's wel met harde returns aan.
Lever bij de diskette altijd een drietal afdrukken van de tekst aan, waarop bijvoorbeeld staat aangegeven waar u de illustraties had gedacht.

Tekst
Maak een korte, bondige titel; vermeld de naam van de auteur zonder eventuele titels. Paragrafen worden aangeduid met korte tussenkoppen (maximaal 23 aanslagen); per kopje vervallen er 4 regels basistekst.
De basistekst komt in een 3-koloms stramien. Een volle pagina telt $3 \times 54 = 162$ regels van 35 aanslagen per regel.
Wiskundige artikelen komen in een 2-koloms stramien. Een volle pagina telt hier $2 \times 54 = 108$ regels van 58 aanslagen per regel.

Illustraties
Voorzie uw tekst van toepasselijke illustraties.
Tekeningen, grafieken: scherpe figuren met zwarte pen of inkt gemaakt, of geprint op een goede printer.
Tabellen: scherp origineel op apart vel aanleveren.
Foto's: liefst zwart/wit met scherp contrast. Voorzie illustraties van een verklarend bijschrift (op apart vel; bij meer illustraties zowel de illustraties als de bijschriften nummeren). Indien een illustratie op een bepaalde plaats in de tekst moet worden opgenomen dient dit duidelijk te worden aangegeven.

Verschijningsdata van Euclides
Omstreeks de 1e van de maanden september, december en mei; omstreeks de 15e van de maanden oktober, januari, februari, maart en juni.
Kopij voor het volgend nummer moet uiterlijk 10 weken voor verschijning geaccepteerd zijn door de redactie; voor de acht middenpagina's (in artikelen voor deze bladzijden mogen geen illustraties, tabellen of formules voorkomen!) geldt een termijn van 7 weken.

Adressen van auteurs

L. van den Broek
Graafseweg 387
6532 ZN Nijmegen

P.J. Brongers
Hereweg 49-D
9725 AB Groningen

M.C. van Hoorn
Noordersingel 12
9901 BP Appingedam

H.N. Schuring e.a.
Cito
Postbus 1034
6801 MG Arnhem

S.L. Weber
KNMI
Postbus 201
3730 AE De Bilt

G. Zwaneveld
Bieslanderweg 18
6213 AJ Maastricht

Kalender

Tot 29 oktober 1995
Groningen

Bernoulli-tentoonstelling
Universiteitsmuseum
tel. 050-3635083/3635562

1 november 1995
Utrecht

Bestuursvergadering NVvW

11 november 1995
Bilthoven

Jaarvergadering/studiedag NVvW (zie Euclides 71-1 bladzijde 16)

15 november 1995
Utrecht

Bestuursvergadering NVvW

8 december 1995
op de scholen

Voorronde Wiskunde A-lympiade (zie Euclides 70-3)

13 december 1995
Utrecht

Bestuursvergadering NVvW

Het koppelen van ongekoppelde modellen

*Susanne L. Weber**

Een wiskundige zal zich niet snel als wiskundige met klimaatonderzoek bezighouden. Hij/zij heeft zich meestal omgeschoold tot oceanograaf of meteoroloog, of beide. Dat is een cultuurschok. Theorema's en hun bewijzen verdwijnen naar de achtergrond, het fysische systeem dat nooit in al haar complexiteit beschreven kan worden staat voorop. Is die cultuurschok eenmaal doorstaan, dan is een (brede) wiskundige vooropleiding een goede basis. De wiskunde die van pas komt omvat alle vakken uit de toegepaste wiskunde.
Ik wil een voorbeeld geven uit de theorie van dynamische systemen. Het gaat om een zogenaamd boxmodel: een evolutie-vergelijking voor één variabele, die een bepaalde representatieve eigenschap van het doosje (de box) voorstelt. Het doosje kan bijvoorbeeld de aardse atmosfeer zijn. In de tijd dat computers nog in de kinderschoenen stonden waren deze boxmodellen populair. Men heeft er bijvoorbeeld de invloed van het aangroeien en afsmelten van ijskappen op de temperatuur op aarde mee onderzocht. Moderne computers zijn zo krachtig, dat de modellen die gebruikt worden voor klimaatsimulaties minimaal 10^4 variabelen bevatten.
Sinds de 80-er jaren experimenteert men met het koppelen van atmosfeer- en oceaanmodellen, die apart (binnen verschillende disciplines) tot ontwikkeling zijn gekomen. Hierbij treden grote problemen op. Experimenten met een complex gekoppeld systeem kosten snel tientallen uren rekentijd op een supercomputer. Boxmodellen zijn een hulpmiddel om de gedachten te ordenen, om simpele experimenten te doen en zo vertrouwd te raken met fundamentele eigenschappen van het systeem. Daarna kan men gericht experimenteren met steeds ingewikkelder systemen.

Stel dat T_a en T_o de (globaal en jaarlijks gemiddelde) temperatuur van de atmosfeer en de oceaan zijn. Dan is:

$$C_a \frac{dT_a}{dt} = R_a - \lambda_a T_a + k(T_o - T_a) \qquad (1)$$

$$C_o \frac{dT_o}{dt} = R_o - \lambda_o T_o - k(T_o - T_a) \qquad (2)$$

Hierin zijn $C_a = 10^7$ J/(m^2 K), $C_o = 10^8$ J/(m^2 K) de warmtecapaciteit van de atmosfeer en de oceaan. De termen in het rechterlid representeren opwarming ten gevolge van kortgolvige zonnestraling ($R_a = 75$ W/m2, $R_o = 170$ W/m2), afkoeling ten gevolge van langgolvige straling naar de ruimte (met emissiecoëfficiënten $\lambda_a = 0.820$ W/(m2 K), $\lambda_o = 0.062$ W/(m2 K)) en de uitwisseling van warmte tussen de atmosfeer en de oceaan (met uitwisselingscoëfficiënt $k = 60$ W/(m2 K)).
De evenwichtstemperaturen die bij deze parameterwaarden horen zijn eenvoudig uit te rekenen door het linkerlid gelijk aan nul te stellen: $T_a = 277.60$ K en $T_o = 280.14$ K. We gaan ervan uit dat dit systeem een goede weergave is van de werkelijkheid, dus dit zijn de 'waargenomen' temperaturen.
We onderzoeken hoe het systeem reageert op kleine verstoringen van het evenwicht door de eigenwaarden van (1) en (2) te bepalen. De eigenwaardenvergelijking is:

$$p^2 + \left(\frac{\lambda_a + k}{C_a} + \frac{\lambda_o + k}{C_o}\right)p + \frac{\lambda_a \lambda_o + (\lambda_a + \lambda_o)k}{C_a C_o} = 0 \qquad (3)$$

We kunnen onszelf veel rekenwerk besparen door kleine termen weg te strepen. Dit geeft:

$$p^2 + \frac{k}{C_a}\, p + \frac{\lambda_a k}{C_a C_o} = 0 \qquad (4)$$

Hieruit volgt dat $p_+ = -\dfrac{\lambda_a}{C_o}$ en $p_- = -\dfrac{k}{C_a}$.

Een afwijking van het evenwicht gedraagt zich dus als een combinatie van de oplossingen

$\exp(-\dfrac{\lambda_a}{C_o}\, t)$ en $\exp(-\dfrac{k}{C_a}\, t)$.

Dit betekent dat het systeem na een kleine verstoring weer terug zal keren naar de evenwichtstoestand (een stabiele knoop).

We bekijken nu de ongekoppelde deelsystemen. In dat geval is de laatste term in het rechterlid van (1)

$k(T_o^m - T_a)$ en in het rechterlid van (2) $k(T_o - T_a^m)$. Hierin zijn T_a^m, T_o^m de gemeten temperaturen. We nemen hiervoor de evenwichtswaarden van het gekoppelde systeem. De evenwichtstemperaturen van de ongekoppelde deelsystemen zijn nu natuurlijk gelijk aan die van het gekoppelde systeem. De eigenwaarden van de deelsystemen zijn echter

$$p_o = -\frac{k}{C_o} \; en \; p_a = -\frac{k}{C_a}.$$

Het teken is hetzelfde, maar de tijdschalen zijn veranderd. In het ongekoppeld systeem wordt een afwijking van de evenwichtstemperatuur ongedaan gemaakt door de warmteflux aan het lucht-zee oppervlak. Dit proces heeft een tijdschaal van $C_a / k \sim 2$ dagen voor de atmosfeer en $C_o / k \sim 19$ dagen voor de oceaan. Het gekoppelde systeem kan een afwijking alleen kwijtraken door langgolvige uitstraling naar de ruimte. De tijdschaal van dit proces wordt gegeven door $C_o / \lambda_a \sim 4$ jaar.
Dit verschil in tijdschalen tussen het gekoppelde systeem en de ongekoppelde deelsystemen is belangrijk, omdat het te maken heeft met verschillen in variabiliteit. Ongekoppelde oceaanmodellen hebben andere variabiliteitseigenschappen dan de oceaancomponent van een gekoppeld systeem, zelfs als de modellen een perfekte weergave van de werkelijkheid zijn.

Om het voorbeeld interessanter te maken, maken we het model nu iets ingewikkelder:

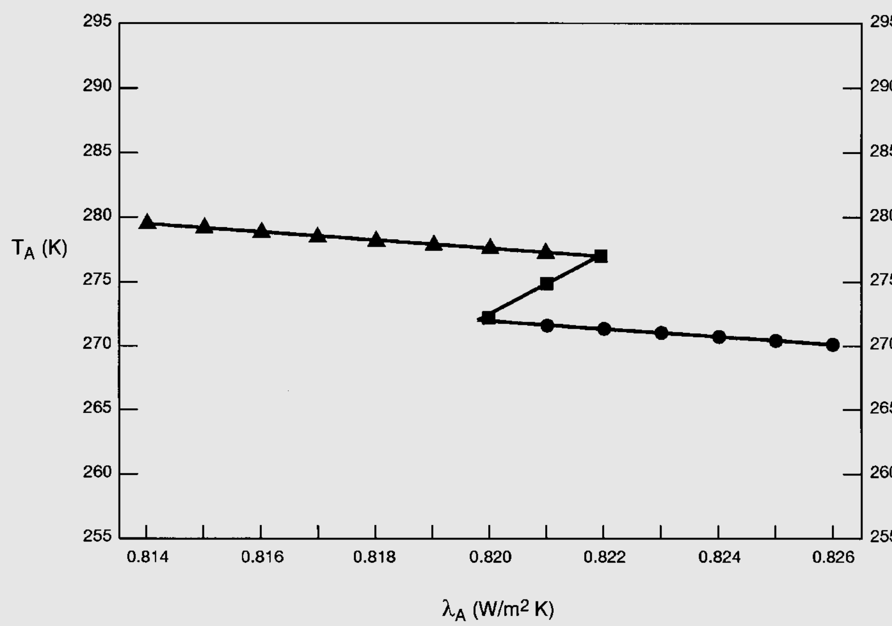
$R_a = 70$ W/m^2
voor $T_a < 272$ K (5a)

$R_a = 70$ W/m^2 $+ c(T_a - 272)$
voor 272 K $< T_a <$ 277 K (5b)

$R_a = 75$ W/m^2
voor $T_a > 277$ K (5c)

In (5b) is $c = 1$ W/(m^{2}K). Een van de parameters van het model is nu een (lineaire) functie van de temperatuur. De geabsorbeerde zonnestraling neemt toe als de temperatuur toeneemt, omdat een warmere aarde minder (sterk reflecterend) ijs bevat. Dit heet een 'feedback' mechanisme. Het klimaatsysteem bevat vele van zulke feedbacks. We kunnen de evenwichten van het model bepalen door achtereenvolgens (5a, b, c) in te vullen in (1). Daarna moeten we nagaan of de gevonden evenwichtstemperatuur van de atmosfeer voldoet aan de voorwaarde voor de gebruikte R_a. Er zijn nu drie evenwichten: twee stabiele knopen (5a, c) en één (instabiel) zadelpunt (5b). Ook in dit voorbeeld zijn de tijdschalen van het gekoppelde systeem anders dan die van de ongekoppelde deelsystemen.

We kijken nu wat er gebeurt als we een kleine fout maken bij het modelleerwerk. Dit komt natuurlijk vaak voor, alleen al omdat meetinstrumenten een eindige



Figuur 1a: T_A als functie van de emissieparameter λ_A met alle overige parameters constant.

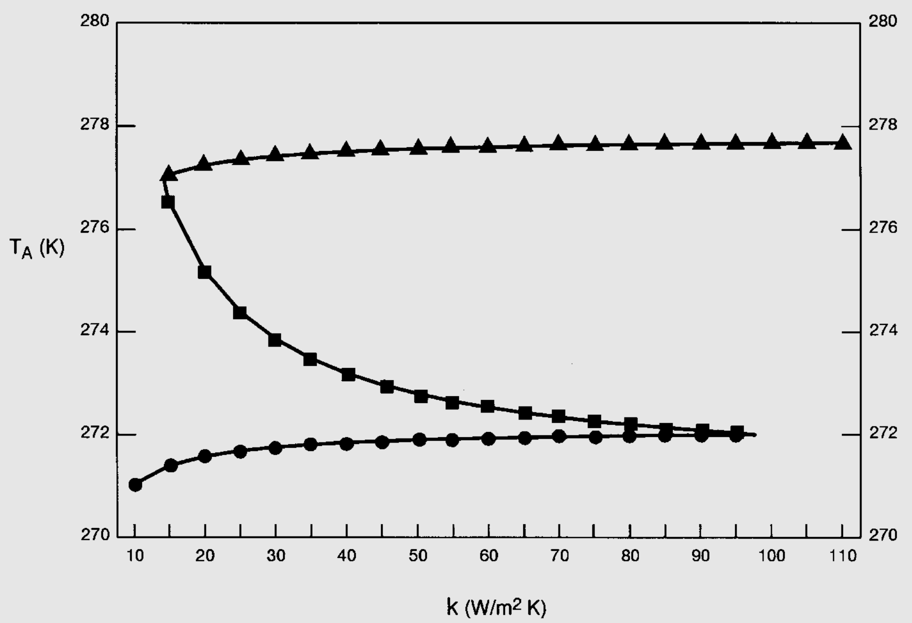
precisie hebben. Stel dat de atmosferische emissiecoëfficient niet goed bepaald is: $\tilde{\lambda}_a = 0.825$. We bekijken eerst het ongekoppelde geval. De evenwichtstemperaturen zijn: $T_a = 277.57$ K en $T_o = 280.14$ K. De atmosferische temperatuur is 0.03 K te laag ten opzichte van de waargenomen waarde. Dit is een heel acceptabel resultaat.
We koppelen nu het atmosfeermodel en het oceaanmodel. Stel dat we een numerieke integratie uitvoeren van (1) en (2), met de ongekoppelde evenwichtstemperaturen als beginwaarden. Er blijkt een sterke 'klimaatdrift' op te treden: na een heel lange tijdsintegratie (zeker 100 jaar) bereikt het model een evenwichtstoestand met $T_a = 270{,}40$ K en $T_o = 272{,}95$ K. Dit is ongeveer 7 K kouder dan het waargenomen klimaat, een onacceptable fout. De verklaring is dat dit model maar één evenwicht heeft (voor $R_a = 70$ W/m^2), door de fout in de derde decimaal van λ_a.
Figuur 1a toont hoe het aantal mogelijke oplossingen voor T_a afhangt van de emissieparameter. Het is duidelijk dat dit aantal heel gevoelig is voor kleine veranderingen in λ_a. Ter vergelijking geeft figuur 1b de atmosferische evenwichtstemperatuur als functie van de uitwisselingsparameter *k*. Het gekoppelde systeem is nauwelijks gevoelig voor deze grootheid.

De variabiliteit van het gekoppelde systeem en de klimaatdrift in gekoppelde modellen vormen belangrijke (en onopgeloste) vraagstukken binnen het klimaatonderzoek. Het eerste kunnen we natuurlijk niet oplossen zonder het tweede opgelost te hebben. We willen immers weten wat de variabiliteit rond het waargenomen klimaat is. Het tweede kunnen we niet oplossen zonder de interactie-mechanismen tussen atmosfeer en oceaan te begrijpen. Die bepalen de evenwichten en de variabiliteit van het gekoppelde systeem. We moeten dus stap voor stap aan beide problemen tegelijk werken.

Noot

* De auteur is werkzaam bij het KNMI.

Figuur 1a en 1b.
De evenwichtstemperatuur T_A berekend uit (1), (2) en (5a)●, (5b)▲, (5c)■. (Merk op dat (5a) geldt voor $T_A < 272$ K, (5b) geldt voor 272 K < T_A < 277 K en (5c) geldt voor $T_A > 277$ K.)



Figuur 1b: T_A als functie van de uitwisselingsparameter *k* met alle overige parameters constant.

INTERVIEW

‘Leerlingen die er geen talent voor hebben moeten geen wiskunde kiezen’

Martinus van Hoorn

Liselot van Dam, 29 jaar, werkt nog niet lang als wiskundelerares. Het afgelopen schooljaar gaf ze 14 lessen aan de Goudse Scholengemeenschap, daar had ze $2\frac{1}{2}$ brugklas en één mavo-3-klas.
Een jaar eerder viel ze een aantal maanden in op het ‘Wagenings’, in haar woonplaats Wageningen.
Dit jaar werkt ze aan het Marnix College te Ede, veel dichter bij Wageningen.

Hoe ben je wiskundelerares geworden?
Ik heb in Wageningen cultuurtechniek gestudeerd, welke studie ik in het buitenland – waar mijn man werk kreeg – heb afgemaakt. Aan de universiteit van Malawi heb ik colleges gegeven.
Terug in Nederland wou ik het onderwijs in, en in Diemen was er een opleidingsmogelijkheid voor herintredende vrouwen. Dat dit voor een bevoegdheid wiskunde was, was toeval, al vind ik het wel een mooi vak. Twee jaar ben ik heen en weer gereisd naar Diemen, toen had ik mijn papiertje. Ik had vrijstellingen, waardoor de studie voor mij nog betrekkelijk goed te doen was.

Hoe bevalt het je als wiskundelerares?
Het lesgeven viel toch eerst tegen. De korte stages tijdens de studie wegen niet op tegen de echte ervaring als lerares. Wel heb je door de stages een tijdje in een andere school gekeken.
Je kunt heel veel leren, van je collega’s, van je eigen ervaringen, en door te kijken wat de leerlingen ervan bakken. Dat is nog het mooiste: dat je ziet dat je ze echt iets nieuws hebt geleerd, over negatieve getallen of over letterrekenen bijvoorbeeld.

Zou je liever aan één school blijven?
Ja, maar dan graag niet zo ver van huis.
Als beginner heb je een onzekere positie. Door de regels inzake wachtgelders kom je heel moeilijk aan de bak. Je reiskosten krijg je vergoed, maar in Gouda moest ik een extra fiets kopen (+ stallen), en als je op zo’n afstand van je woonplaats werkt gaan ook de kosten voor de oppas aantikken. Voor een beginner gaat er zo heel wat van het karige salaris af.
Als parttimer moet je bovendien wel met alles, vergaderingen, sectieoverleg en zo, meedraaien.

Hoe is het je bevallen in Gouda?
De Goudse Scholengemeenschap is een goede en leuke school. Ik heb er met veel plezier lesgegeven. Aan de steun van collega’s heb ik heel veel gehad, daar denk ik graag aan terug. Het stimuleert me dat ik kinderen echt iets hebt kunnen leren.

Je had $2\frac{1}{2}$ brugklas. Hoe zit dat?
Ik had twee mavo/havo-brugklassen, 4 lessen per week. Daarnaast had ik een havo/atheneum-brugklas voor 2 lessen per week. Ik gaf daar de meetkunde, een collega gaf de algebra.

Je gaf ook steunlessen aan brugklassers. Hoe werkte dat?
Alle lessen duurden 45 minuten, waardoor ik ook één lesuur per week een steunles kon geven, voor leerlingen uit brugklassen die extra begeleiding nodig hadden. Daar had ik soms wel vier clubjes van leerlingen met verschillende soorten problemen. Zodoende was klassikaal werken onmogelijk. Ik zei tegen de leerlingen: ik ben niet van plan orde te houden. Dat werkte wonderwel.

De brugklassen hadden verder nog een rekenuur. Kun je daar iets over vertellen?
Dat werd weer door een ander gegeven. Tijdens het rekenuur werd de basisschoolstof nog eens doorgenomen. Ook de rekenhoofdstukken uit de methode (Netwerk) werden daar gedaan.

Hoe stelde je de proefwerken samen?
Dat hoefde ik voor de brugklassen niet te doen. Er waren heel uitgekiende proefwerken, voor alle leerlingen dezelfde, met twee verschillende cijfers die erop moesten worden gegeven (extra nakijkwerk trouwens), en die proefwerken werden door collega’s gemaakt.
Voor de mavo-3-klas maakte ik wel zelf de proefwerken. Dat was eigenlijk leuker om na te kijken, je ziet dan veel meer van jezelf terug.

Wilde je graag dat je mavo-3-ers wiskunde gingen kiezen?

Als ze geen talent voor wiskunde hebben, moeten ze, vind ik, wat anders kiezen. Ik heb wel eens gevraagd: denk je dat je niet veel gelukkiger zou zijn zonder wiskunde?
Wiskunde heeft zó'n status! Je hoeft niet bang te zijn dat te weinig leerlingen wiskunde kiezen.

Die psychologische factor zag je al in de brugklas?
Reeds in de brugklas zie je dat leerlingen gaan huilen als ze op een repetitie vast komen te zitten. Sommigen trillen en beven al bij de gedachte. Een onvoldoende op een repetitie is een enorme dreun voor ze. Het systeem met de dubbele becijfering maakt het er, wat dat betreft, niet beter op.

Kon je al je leerlingen het voor hen meest geschikte onderwijs geven?
Ik zou meer naar groepswerk toe willen. Bij klassikaal lesgeven vervelen sommigen zich. Het huiswerk bespreken moet niet de hele les duren. Bij groepswerk kun je meer van leerlingen eisen.

Had je allochtone leerlingen?
In Gouda zijn heel wat Marokkaanse kinderen; die hebben soms nog meer dan Goudse leerlingen (!) moeite met het begrijpen van een leestekst. Ze zijn vaak heel intelligent en gemotiveerd, maar door hun taalproblemen komen ze in de mavo. Als er boven een opgave staat: 'Herleid', moet ik uitleggen wat dat betekent. Als ze een voorbeeldje zien, kunnen ze de sommen maken, wat ze graag doen.

Ga je door in het onderwijs?
Ik hoop dat dat kan. Het vraagt wel wat van je, het is veel meer dan zoveel lessen geven. Als je bovendien in een onzekere positie zit, denk je soms na over andere mogelijkheden. Ik zie het wel, bureauwerk wil ik zeker niet.



Voor wie niet gelooft dat een diagonaalvlak van een balk geen symmetrievlak is: snij een patatje uit een aardappel en snij dat vervolgens diagonaal door; spiegeltje erbij: wat je ziet is echt geen balk!





Dit artikel geeft resultaten van een onderzoek naar de problemen die docenten in de bovenbouw van het vwo ervaren bij het onderwijzen van de statistiek.

Statistiekonderwijs: examengericht of levensecht?

Peter Jan Brongers

In het kader van een afstudeeronderzoek bij de werkgroep Wiskundedidactiek van de Rijksuniversiteit Groningen (*) heb ik gesprekken gevoerd met 21 leraren vwo wiskunde A. Doel was de knelpunten in het statistiekonderwijs in kaart te brengen, in het bijzonder met betrekking tot het onderwerp toetsen van hypothesen. Dit artikel bevat zowel enkele bevindingen als wat eigen gedachten naar aanleiding van het onderzoek. Belangstellenden kunnen het onderzoeksverslag aanvragen bij dr. A. Van Streun van de Rijksuniversiteit Groningen, zie noot [1].

Zoals het examenprogramma bedoeld is …

Het onderdeel *Waarschijnlijkheidsrekening en statistiek* van het eindexamenprogramma vwo wiskunde A is een lijstje van onderwerpen dat opent met de slogan *kritische beoordeling van statistische gegevens.* Daarna volgt een serie begrippen uit de beschrijvende en mathematische statistiek. Het is blijkbaar de bedoeling dat de leerlingen die begrippen en technieken leren te gebruiken binnen het kader van het eerstgenoemde, algemene doel.
Als de statistiek binnen dit kader onderwezen wordt is er geen wezenlijk verschil tussen examengericht en levensecht statistiekonderwijs: enerzijds beantwoordt het onderwijs aan de bedoeling van het examenprogramma, anderzijds geldt dat de leerlingen een kritische houding leren aannemen waarmee ze in het dagelijks leven allerlei statistische uitspraken op hun waarde kunnen schatten. En dat is nuttig in onze maatschappij waarin de kranten vol staan met ‘op onderzoek gebaseerde’ uitspraken: wie eerst samenwoont heeft meer kans om later te scheiden, het Nederlands elftal had een kans van 18% om het WK voetbal te winnen, ook de vernieuwde versie van Omo Power brengt het wasgoed grote schade toe, etcetera, etcetera.
Merk op dat de twee benaderingen examengericht en levensecht elkaar ook vinden in het streven de leerlingen goed voor te bereiden op latere colleges statistiek. Het wezen van de statistiek is het populatie-steekproefmodel: wat zeggen de steekproefgegevens over de populatie? Als een leerling hiervan door levensecht onderwijs op school enige notie krijgt, is het risico kleiner dat hij of zij later als psychologiestudent statistiek alleen maar ziet als een verzameling technieken, op grond waarvan het softwarepakket SPSS getallen oplevert waarmee onderzoeksverslagen van de nodige wetenschappelijke franje kunnen worden voorzien.
Het onderwerp toetsen van hypothesen kan een mooie afsluiting zijn van de statistiek-lijn bij wiskunde A. Met behulp van de geleerde begrippen en technieken, en dankzij een kritische houding ‘in de kweek’ komen leerlingen tot het formuleren van verantwoorde statistische uitspraken in eenvoudige situaties. De modelvorming waarvan onherroepelijk sprake is, is exemplarisch voor hoe statistiek op een zinvolle manier toegepast kan worden, en wordt daarom geëxpliciteerd.

Een onderzoek onder docenten

De vraag is nu of in de praktijk examengericht statistiekonderwijs ook levensecht is. Kijken we naar het onderwerp toetsen van hypothesen, wordt dat niet vaak afgeraffeld onder druk van het naderende examen? Weten de meeste docenten ook niet meer van statistiek dan wat er in hun methode staat? En - zie Van Putten (1990[2]) en het *intermezzo* verderop in dit artikel - het gehalte van veel opgaven in die methodes is nu eenmaal niet van dien aard dat het een gezonde kritische houding van de leerling ontwikkelt!
Al met al is er genoeg reden om de praktijk van een stukje statistiekonderwijs wat nader in kaart te

brengen. In een onderzoek (1993) werden 21 leraren geïnterviewd. Sectievoorzitters van scholengemeenschappen in Noord-Nederland werden aangeschreven; zij selecteerden één voor het onderzoek geschikte en bereidwillige docent.
De probleemstelling luidde: ‘Welke problemen ervaren docenten in de bovenbouw van het vwo bij het onderwijzen van de statistiek, in het bijzonder het hypothesen toetsen?’ Docenten werd niet alleen naar een lijstje met problemen gevraagd, maar ook naar hun onderliggende attitudes met betrekking tot de doelstellingen van hun statistiekonderwijs. Ook werd gekeken naar de manier waarop zij het onderwerp toetsen van hypothesen concreet onderwijzen. Om meer inzicht te krijgen in de attitudes van de docenten werd hun reactie gepeild op zomaar een typische opgave, een rijtjes-opgave uit de paragraaf over de tekentoets uit een van de grote methodes. Laten we allereerst zelf eens nadenken over deze opgave, het kunstmestprobleem.

Het kunstmestprobleem

Een volkstuinvereniging onderzoekt of er verschil bestaat tussen twee soorten kunstmest. Op 16 percelen bemest men de ene helft met soort A en de andere helft met soort B. Daarna wordt er gezaaid. De opbrengst bij het oogsten zie je in de tabel hiernaast (opbrengst in kg).

a *Is er bij een significantieniveau van 5% reden om aan te nemen dat er kwaliteitsverschil bestaat tussen de beide soorten?*
b *Is er bij een significantieniveau van 5% reden om aan te nemen dat soort B beter is dan soort A?*

A	B
230	310
220	305
280	270
225	285
260	270
210	230
280	300
225	315
215	305
205	280
220	200
280	260
250	305
255	360
255	305
265	250

Een duidelijke opgave, nietwaar? De opgave is zo geconstrueerd, dat de hypothese van gelijke kwaliteit van beide soorten wel de tweezijdige tekentoets (onderdeel a), maar niet de eenzijdige tekentoets kan doorstaan (gesuggereerd bij onderdeel b). 12 keer brengt soort B het meest op, en voor de Bin($16, \frac{1}{2}$)-verdeelde stochast X, het aantal keren dat B meer opbrengt dan A, geldt dat de overschrijdingskans $P(X \geq 12) = 0{,}0384$ kleiner is dan het significantieniveau 0,05, maar weer groter dan het halve niveau 0,025.

Reacties van docenten

Van de 21 reacties worden er hier drie gedeeltelijk weergeven. Om te beginnen een kritische reactie van een docent die in zijn commentaar nogal alleen staat:

> ‘Bij onderdeel a ziet de leerling het woord significantieniveau staan, dus weet hij dat hij moet toetsen. Dus leest hij nog een keer het verhaaltje en ziet ‘of er verschil bestaat tussen beide soorten’. Vervolgens voert hij klakkeloos een tweezijdige tekentoets uit. De opgave kan veel leuker gemaakt worden: haal er mensen bij die elk iets beweren zodat er een discussie ontstaat. De leerlingen moeten proberen zich in de volkstuinders te verplaatsen. Als ik volkstuinder was had ik geen toets nodig: ik koos voor B! Als het resultaat van een toets luidt: ‘Geen significant kwaliteitsverschil geconstateerd’, confronteer de leerlingen daar dan mee en laat ze een opstelletje schrijven over hoe dit te rijmen is met wat je verwacht. Dan ben je echt met toetsen bezig.’

De volgende reactie is meer typisch voor een groter deel van de onderzochte groep leraren (vraag van de interviewer cursief):

> ‘Er mag wel een opstapje bij, dat het met een tekentoets moet. Eerst tweezijdig en dan eenzijdig.’
> *‘Bij a is het antwoord ‘nee’, bij b ‘ja’. Wat is de clou?’*
> ‘Het significantieniveau is bepalend voor de uitslag. Het zit ’m vast op die 2,5%-drempel in de rechterstaart. (…) Ik zou overigens alleen eenzijdig toetsen. Gezien het resultaat is het belachelijk om tweezijdig te toetsen. Ik heb geen statistische achtergrond, dus ik kan geen uitspraak doen over de kans dat A in dat geval toch beter is, als je daarover mag spreken. Trouwens, leerlingen zouden vraag a onzin vinden; bovendien is het verwarrend voor de leerlingen.’

Dit laatste argument wordt vaak genoemd. Zeven docenten geven expliciet aan liever alleen vraag b te stellen, omdat de opeenvolging van vragen zoals die nu in de tekst staat verwarrend is voor de leerlingen.

Uit de derde reactie blijkt dat de praktijk en het doel van het statistiekonderwijs soms weinig met elkaar te maken hebben:

> ‘Wat wil je met zo’n opgave? Bij deze opgave gaat het er niet om

of alles statistisch 100% verantwoord gaat. Het gaat erom te testen of de leerling een- en tweezijdig kan toetsen en of hij de tekentoets herkent. Als je wilt testen op vaardigheden is dit een prima opgave. Wiskunde A is grotendeels het aanleren van standaardprocedures. Het maken van kritische kanttekeningen is in de huidige praktijk van mindere importantie.'

Tot zover enkele citaten. De reacties vormen een aanwijzing dat voor veel docenten examengericht statistiekonderwijs geen levensecht onderwijs is.

Intermezzo: twee kanttekeningen bij het kunstmestprobleem en een suggestie ter verbetering

1 Soort B lijkt duidelijk beter. Toch mag op grond van de tweezijdige tekentoets soort B niet significant beter verklaard worden. Hier is echter niet het significantieniveau cruciaal, maar de zwakte van de voorgestelde tekentoets. Deze toets reduceert de data immers tot een paar plussen en minnen. Er bestaan toetsen die de data veel meer uitbuiten. Zo is er de veel gebruikte t-toets, die de *gemiddelde* opbrengsten voor beide soorten vergelijkt. Populair zijn ook de zogenaamd parametervrije toetsen, zoals de Wilcoxon-rangordetoets. Bij deze toets tellen de vier 'overwinningen' van soort A op soort B niet zo zwaar, omdat de meeropbrengst in die gevallen steeds beperkt is. Zonder verder rekenwerk vermeld ik dat beide genoemde alternatieve toetsen de hypothese dat beide soorten kunstmest evenveel opbrengen met kracht verwerpen. De tweezijdige(!) Wilcoxon-toets, bijvoorbeeld, verwerpt de hypothese zelfs op het niveau 0.01!

2 Door de volgorde van de vragen nodigt de opgave uit tot het bedrijven van een grote statistische zonde: de zogenaamde 'datasnooping', d.w.z. inspectie van de data voordat de toetsingsprocedure opgesteld wordt. Want waarom vraagt onderdeel b ineens om eenzijdig te gaan toetsen? Is het niet omdat de data zo duidelijk voor het 'beter' van soort B lijken te pleiten? Elke statistische toets moet echter opgesteld worden voor het steekproefresultaat wordt bekendgemaakt! Verlaten we dit principe dan is het niet moeilijk om allerlei onzin te 'bewijzen'. Bijvoorbeeld: 'Bij bemesting met de soorten A en B zal in een kwart van de gevallen soort A meer opbrengen'.

Er kan nog zoveel over deze opgave gezegd worden. Maar kritiek leveren is gemakkelijk. Waarom trouwens al deze kritiek? Geen enkele opgave kan immers aan allerlei, soms strijdige eisen voldoen. En waarom dat gemuggezift over 'betere' toetsen als de leerlingen alleen maar de tekentoets hoeven te kennen?
Omdat er belangrijke principes uit blijken die ook door iemand die alleen de tekentoets kent moeten kunnen worden begrepen!
Ik wil daarom een suggestie doen om de opgave te verbeteren. Het is maar een poging; de lezer wordt aangemoedigd over betere suggesties na te denken.

De kunstmestsoort Anabola wordt vanouds door veel volkstuinders gebruikt. Er komt een nieuw soort, Fertix, op de markt, dat volgens de fabrikant van een betere samenstelling is dan soort Anabola. Een consumentenorganisatie wil dit wel eens onderzoeken. Op een proefboerderij bemest men de ene helft van 16 percelen met Anabola en de andere helft met Fertix. Daarna worden er aardappelen gepoot. Bij de oogst wordt de opbrengst in kg. bepaald.

a *Noem een goede en een minder goede kant van deze proefopzet.*

De opbrengst bij het oogsten zie je in de volgende tabel (opbrengst in kg) (voor de lezers van dit blad: zie de tabel bij de oorspronkelijke opgave).

b *Voer de tekentoets uit bij een significantieniveau van 0.025. Is er reden om aan te nemen dat Fertix meer opbrengt dan Anabola?*
c *Beoordeel het gebruik van de tekentoets in deze situatie.*

Meer over het onderzoek

De reacties op het kunstmestprobleem zijn illustratief voor de praktijk van het statistiek-onderwijs. Opgaven over hypotheses toetsen lenen zich uitstekend voor het werken aan de doelstelling kritisch kijken naar statische gegevens. Maar als een docent al meer wil dan het enkel aanleren van algoritmen, komt het er meestal niet van. Naast de tijdsdruk komt dit vooral door de eigen onvertrouwdheid met het onderwerp.

In de volgende alinea volgt een korte schets van de problemen zoals die uit het onderzoek naar voren gekomen zijn.
Hoewel nagenoeg alle docenten aangeven dat de doelstelling kritisch kijken niet wordt bereikt, ervaart niet elke docent dit even sterk als een probleem. Voor de onderzochte groep geldt dat men meer problemen ervaart naarmate men meer gericht is op begripsvorming. Zo vinden voorstanders van levensecht statistiekonderwijs de manier waarop hun methode het onderwerp toetsen van hypothesen aanbiedt vaak onbevredigend: de leerlingen leren slechts recepten voor het oplossen van vraagstukken. Slechts één docent is uitgesproken tevreden over zijn sterk gestructureerde methode; als afge-

studeerd statisticus weet hij zelf genoeg waarde aan het boek toe te voegen. Leraren die primair ‘examengericht’ zijn (‘examengericht’ hier als tegenpool van ‘levensecht’!) waarderen hun methode juist meer naarmate deze veel context-arme opgaven bevat, die met duidelijke algoritmen opgelost kunnen worden. De onderzochte groep bestaat uit ongeveer evenveel ‘examengerichte’ docenten, als primair op begripsvorming gerichte docenten. Wat de didactiek van het hypothese toetsen betreft: naast alle didactische problemen en probleempjes vallen twee dingen op. Ten eerste wordt op schoolonderzoeken het al dan niet expliciet opschrijven van het model meestal buiten de normering gehouden. Ten tweede neigen sommigen ernaar het gebruik van kritieke gebieden te prefereren boven de benadering waar alleen met overschrijdingskansen gewerkt wordt. Maar de meeste docenten zeiden nooit bij deze punten stil te staan.

Merk op dat als we de 21 docenten die meewerkten aan het onderzoek opvatten als een relatief geïnteresseerde steekproef uit de populatie van alle docenten die vwo wiskunde A geven, we kunnen verwachten dat de algehele situatie van het statistiek-onderwijs er niet rooskleuriger uit zal zien dan voor deze groep docenten. Dit is geen statistisch bewezen uitspraak, maar een onderbouwd vermoeden!

Hoe verder?

Zou op het vwo, net als op het havo, niet veel meer aandacht besteed moeten worden aan steekproeftheorie? Het wezen van de statistiek is immers dat een uitspraak over een of andere populatie gebaseerd wordt op de kenmerken van een steekproef uit die populatie.

Lees verder op pag.72

40 jaar geleden

949[1]

Schets in één figuur de grafieken van de functies:

$$f_1(x) \equiv x + 4$$
$$f_2(x) \equiv x^2 - 4$$
$$f_3(x) \equiv \sqrt{x^2 - 4}$$

Los nu op: $f_3(x) < f_1(x)$

en controleer het antwoord met behulp van de getekende grafieken.

950

Van een reeks: $t_1, t_2, t_3, \ldots, t_n, \ldots$

is gegeven $S_n = 2n^2$, waarbij S_n voor elke gehele waarde van n de som van de eerste n termen voorstelt ($S_1 = t_1$).

Laat zien, dat deze reeks een rekenkundige is.

Tussen elk tweetal opvolgende termen van deze reeks interpoleert men één term. Van de rekenkundige reeks, die na interpolatie ontstaat, stelt S'_n de som van de eerste n termen voor.

Laat zien, dat $\frac{S_n}{S'_n}$ een limiet heeft en bepaal deze limiet.

Bepaal hoe groot n minstens moet zijn, opdat de absolute waarde van het verschil van deze limiet met $\frac{S_n}{S'_n}$ kleiner is dan $\frac{1}{10}$.

951

Gegeven $F(x) = \dfrac{x^{{}^2\log x}}{16 - x^{{}^2\log x}}$

Los op de vergelijking $F(x) = F(\frac{1}{2})$.

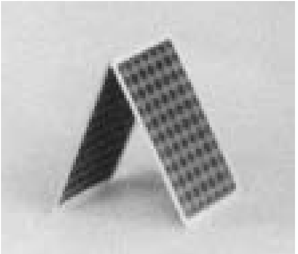
Los op de ongelijkheid: $F(x) > \frac{1}{7}$

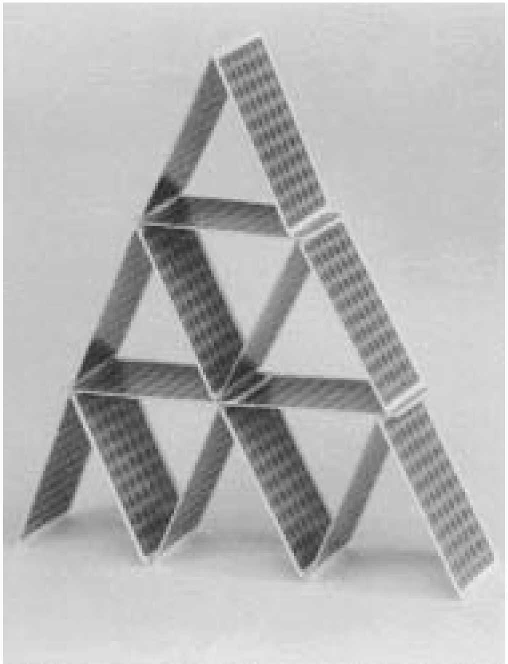
(ontleend aan het Eindexamen der Gymnasia in 1955)

Noot

1 Vraagstukken uit: Nieuw Tijdschrift voor Wiskunde 43 (1955-1956).

Werkblad





1 Kaartenhuizen

Op de foto's zie je twee driehoekige kaartenhuizen. Voor het huis van één verdieping hoog zijn 2 kaarten nodig. Voor het huis van drie verdiepingen hoog zijn 15 kaarten nodig.

2p 1 ☐ Hoeveel kaarten zijn er nodig voor een kaartenhuis van twee verdiepingen?

2p 2 ☐ Hoeveel kaarten zijn er nodig voor 4 verdiepingen?

1p 3 ☐ Vul de tabel op de bijlage bij vraag 3 in.

Rob hield een wedstrijd met zijn vader en moeder wie het hoogste kaartenhuis kon bouwen. Rob heeft één verdieping meer dan moeder; moeder heeft één verdieping meer dan vader. Moeder gebruikte 17 kaarten meer dan vader.

5p 4 ☐ Hoeveel kaarten gebruikte Rob meer dan moeder? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.

Voor de kaartenhuizen geldt de volgende formule:

$K = 1{,}5\ V^2 + 0{,}5\ V$
K is het totaal aantal kaarten
V is het aantal verdiepingen

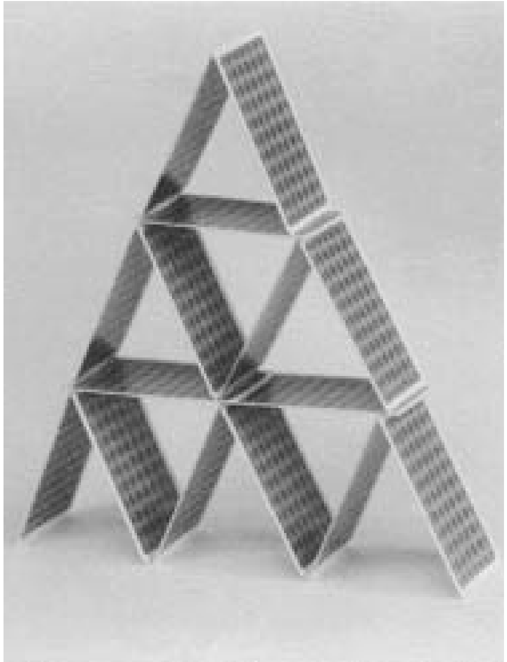
Iemand beweert dat hij een huis kan bouwen van wel 18 verdiepingen hoog!

4p 5 ☐ Bereken hoeveel kaarten hij dan nodig zou hebben. Schrijf de berekening op.

Uit: Experimenteel examen mavo-C, 1995, 1e tijdvak.

Werkblad

2 Kaartenhuizen



Op de foto zie je een driehoekig kaartenhuis. Daarvoor waren 15 kaarten nodig.

2p 1 ☐ Hoeveel kaarten zijn er nodig voor een kaartenhuis van 4 verdiepingen?

Rob hield een wedstrijd met zijn vader en moeder wie het hoogste kaartenhuis kon bouwen. Rob heeft één verdieping meer dan moeder; moeder heeft één verdieping meer dan vader. Moeder gebruikte 17 kaarten meer dan vader.

5p 2 ☐ Hoeveel kaarten gebruikte Rob meer dan moeder? Leg uit hoe je aan je antwoord komt.

Voor de kaartenhuizen geldt de volgende formule:

$K = 1{,}5\ V^2 + 0{,}5\ V$
K is het totaal aantal kaarten
V is het aantal verdiepingen

Iemand beweert dat hij een huis kan bouwen van wel 18 verdiepingen hoog!

3p 3 ☐ Bereken hoeveel kaarten hij dan nodig zou hebben. Schrijf je berekening op.

Je hebt 208 kaarten.

4p 4 ☐ Hoeveel verdiepingen hoog zou je daarmee maximaal kunnen komen? Leg je antwoord uit.

Uit: Experimenteel examen mavo-D, 1995, 1e tijdvak.

Opgave 665

In **Elsevier** nummer 10 van 11-3-1995 stond een artikel over de Amerikaanse spelontwerper Robert Sun. In de jaren tachtig bedacht hij een spel 'dat de potentie heeft het rekenonderwijs in de wereld op zijn kop te zetten'.
Dit zogenoemde '**Het 24-spel**' bestaat uit felgekleurde kaarten waarop vier cijfers staan. Die vier cijfers moeten door optellen, aftrekken, vermenigvuldigen of delen het getal 24 vormen. Uiteraard mogen er ook haakjes gebruikt worden. Een voorbeeld: Op een kaart staan de cijfers twee, drie, zes en negen. Dan zijn er verschillende manieren om als uitkomst 24 te krijgen:

$$2 \times 6 + 3 + 9 = 9 \times \frac{6}{2} - 3 = 2 \times (9 + 6 - 3) =$$

$$(9 - 3) \times (6 - 2) = \ldots = 24.$$

De keuze van het getal 24 was niet willekeurig. Vierentwintig kan door zes van de negen cijfers worden gedeeld. Ook het karakter van het getal beviel Sun van het begin af aan. 'Het is een universeel getal. Het Griekse alfabet telt 24 letters, het menselijk lichaam 24 ribben, de Egyptenaren verdeelden de dag in 24 uur, de Chinezen het jaar in 24 seizoenen, het oude testament heeft 24 boeken, zuiver goud is 24 karaats en in het Joodse geloof heeft God 24 tronen. Het getal 24 is de sleutel waarmee je de hele wereld kunt openen.'

Recreatielezer *Ad Boons* (18 punten), Tilburg heeft dit spel geheel geanalyseerd en was zo vriendelijk mij een aantal resultaten te sturen. Aan de hand van zijn bevindingen heb ik de volgende vijf puzzelkaarten getrokken. Gevraagd worden steeds ALLE oplossingen!
Kaart A: twee, drie, zeven en acht.
Kaart B: drie, zes, acht en negen.
Kaart C: drie, drie, zeven en zeven.
Kaart D: drie, drie, acht en acht.
Kaart E: een, drie, vier en zes.

Elke juiste inzending, binnen 1 maand ingezonden, levert ladderpunten op, tot een maximum van 5.

Oplossingen, nieuwe opgaven en correspondentie over deze rubriek aan
Jan de Geus Valkenboslaan 262-A,
2563 EB Den Haag.

Recreatie

Oplossing 661

Edouard Lucas (1842 - 1891) publiceerde gedurende zijn korte leven zeer veel op het gebied van de Recreatieve Wiskunde. Zijn bekendste werk is ongetwijfeld het uit 4 delen bestaande ‘Récréations Mathématiques’ verschenen in resp. 1882, 1883, 1893 en 1894. In 1895 verscheen nog ‘L’Arithmétique Amusante’. Gedurende de jaren zeventig verscheen zeer veel van zijn hand in het Parijse tijdschrift ‘Nouvelles Annales de Mathématiques’. In de ‘deuxième série, tome XIV, 1875’ verscheen Question 1180: ‘Une pile de boulets à base carrée ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu’elle en contient 24 sur le côté de la base.’ In 1876 verscheen Question 1194: ‘Une pile de boulets à base triangulaire ne contient un nombre de boulets égal au carré d'un nombre entier que lorsqu’elle en contient sur le côté de la base 1, 2 ou 48.’ Deze zelfde vragen verschenen meestal ook in het Brusselse tijdschrift ‘Nouvelle Correspondance Mathématique’.
De opgave van deze maand was Q. 1194. En het was een beetje flauw van uw puzzelredacteur om u slechts 1 maand de tijd te geven, terwijl het antwoord van Q. 1194 pas *twee jaar* later werd gepubliceerd door A.J.J. Meyl. Logisch dat vele inzenders schreven ‘$n = 1, 2$ of 48 en meer oplossingen vond m’n computer niet’.

Stel zijdelengte piramide is n. Dan moet gelden:

$$\frac{n(n+1)(n+2)}{6} = Q^2.$$

Dit zijn ‘Tetrahedral Numbers’ oftewel de binomiaalcoëfficiënten $\binom{n+2}{3}$.

Verkort weergegeven ging *Kees Nagtegaal* (58 punten), Dordrecht als volgt verder: voor de drie opeenvolgende gehele getallen n, $n+1$ en $n+2$ moet gelden:

Geval	n	$n+1$	$n+2$	
1A	$6a^2$	b^2	c^2	Onmogelijk omdat twee
1B	a^2	$6b^2$	c^2	kwadraten altijd meer
1C	a^2	b^2	$6c^2$	dan twee verschillen.
2A	a^2	$3b^2$	$2c^2$	Onmogelijk omdat twee
2B	$2a^2$	b^2	$3c^2$	opeenvolgende getallen
2C	$3a^2$	$2b^2$	c^2	nooit x^2 en $3y^2$ zijn.
3A	a^2	$2b^2$	$3c^2$	$\Rightarrow a = \sqrt{2}\,b$ voor grote
3B	$3a^2$	b^2	$2c^2$	getallen a, b en c.
3C	$2a^2$	$3b^2$	c^2	Dus onmogelijk.

Voor *kleine* waarden van a, b en c vinden we: bij 3A: $n = 1$, bij 3B $n = 48$ en bij 3C $n = 2$.

Met 61 punten is deze maand winnaar van een boekenbon van *f* 25,–:

Dick Buijs
Lutterveldsestraat 14
4012 DE Kerk-Avezaath.

Heel hartelijk gefeliciteerd!

Vervolg van pag.67

Vragen als ‘wat is de populatie?’, ‘wat is de steekproef?’, ‘is deze steekproef representatief?’ en ‘wat betekent de steekproefgrootheid?’ zouden een onderdeel moeten zijn van het algoritme voor het oplossen van een opgave over hypothese toetsen. Op die manier worden de algoritmisch ingestelde leerlingen gedwongen om na te denken over het probleem, en de dito docenten om er hun normering op af te stellen.
Een aanknopingspunt voor een verbetering is de vernieuwde Tweede Fase. Van Streun (1994[3]) heeft in een uitgewerkt voorstel voor een invulling van de profielen gepleit voor een module *Kansverdelingen en hypothesetoetsen*. In zo’n module zou het onderwerp de aandacht krijgen die het verdient. Zo’n module zou verplicht zijn voor het profiel Economie en Maatschappij, maar is ook voor leerlingen die Natuur en Gezondheid kiezen van belang. Afhankelijk van de ontwikkelingen op het gebied van de examinering kan de stof bovendien op een meer zinvolle wijze getoetst worden: het onderwerp leent zich voor een computersimulatie of een practicum, waarbij met reële data gewerkt wordt.

(*) De auteur is thans werkzaam aan het Lauwerscollege te Buitenpost.

Noten

1 Het onderzoeksverslag Hypothesen toetsen bij wiskunde A VWO, nummer W-9404, van P.J. Brongers, is aan te vragen bij dr. A. van Streun, Rijksuniversiteit Groningen, Wiskunde en Informatica, Postbus 800, 9700 AV Groningen.
2 Putten, B van: Statistiek in huidig vwo wiskunde A-onderwijs (ondertitel: Heeft de kritische keizer kleren aan?); artikel verschenen in De Nieuwe Wiskrant, juli 1990.
3 Streun, A van: De wiskunde in de nieuwe vwo-profielen; artikel in Euclides 69-8, mei 1994.

Spel leidde tot gewelddadige arrestatie

Door onze redactie onderwijs

NIJMEGEN, 13 APRIL. Met getrokken pistolen heeft de Nijmeegse politie gisteren twee leerlingen en een 53-jarige wiskundeleraar van scholengemeenschap Nijmegen-West aangehouden.

Met een bivakmuts over het hoofd getrokken, twee geweren, een pistool en een kruisboog leek het drietal op het punt te staan de bank aan de overkant te overvallen. Maar het bleek een schoolproject. De drie speelden met speelgoedwapens een scène na uit het boek ‘Gijzeling’ van kinderboekenschrijver Evert Hartman.

Medewerkers van de bank die in november nog overvallen is, zagen rond het middaguur een busje met gewapende mannen het tegenoverliggende schoolplein oprijden. Hevig geschrokken alarmeerden ze de politie. Toegeschoten agenten ontwaarden op het schoolplein een „overvaller met een geweer”, trokken hun pistool en arresteerden de drie vermeende overvallers. De medewerkers hebben aangifte gedaan. De politie neemt de zaak hoog op en zal met justitie overleggen of het drietal strafrechtelijk zal worden vervolgd.

Schooldirecteur A. Dam betreurt de gang van zaken. Hij erkent dat de bankmedewerkers net als de voorbijgangers van tevoren gewaarschuwd hadden moeten worden, maar benadrukt dat hij „in zijn maag zit” met mogelijke strafrechtelijke vervolging van de wiskundedocent en zijn twee leerlingen uit 3 HAVO. „Het was een spel voor een filmproject. Dan lijkt me vervolging te ver gaan. Bovendien waren de leerlingen zelf erg ontdaan. Ik hoop maar dat ze geen ernstige schade hebben opgelopen van de gewelddadige overmeestering.”

Uit: NRC Handelsblad

Extra werkgroep Studiedag

Er is nog een extra werkgroep georganiseerd voor de Studiedag op 11 november 1995:

WG 12 *‘De TI-92’, door Paul Drijvers, Freudenthal instituut.*
Terwijl veel docenten nog maar net gewend zijn aan het werken met grafische rekenmachines, zoals de TI-82, zal Texas Instruments binnenkort met de TI-92 op de markt komen. De TI-92 is een palmtop computer en kent naast de mogelijkheden van de inmiddels bekende grafische rekenmachines, ook de mogelijkheden van DERIVE (computeralgebra) en CABRI (meetkunde). In deze werkgroep worden de mogelijkheden van de TI-92 gedemonstreerd.

Noot

Alle verdere informatie over de Jaarvergadering/Studiedag vindt u in Euclides 71-1, bladzijden 16 t/m 18.

Nederlandse
Vereniging van
Wiskundeleraren

In het jaar 2000 bestaat onze vereniging 75 jaar We willen dit grootscheeps vieren.

In het jaar 2000 bestaat onze vereniging 75 jaar
We willen dit grootscheeps vieren. Heeft u hiervoor ideeën? Laat ons die dan weten!

Eén idee is alvast: in het jaar 2000 willen we op 4000 leden staan, om in ronde getallen te spreken.

U kunt daarbij helpen door deze bladzijde te kopiëren en aan een collega, die nog geen lid is van onze vereniging, ter hand te stellen.

Het bestuur is u hier dankbaar voor.

Eigenlijk …

… zou er een vereniging moeten zijn die:

- opkomt voor de belangen van wiskundeleraren
- waakt over de kwaliteit van het wiskundeonderwijs
- examenbesprekingen organiseert
- leraren op de hoogte brengt van nieuwe ontwikkelingen op hun vakgebied
- bijeenkomsten organiseert waar leraren hun mening kunnen geven over wijzigingen van programma's
- er voor zorgt dat onduidelijke examenprogramma's uitgebreid worden toegelicht
- er voor zorgt dat de mening van de mensen voor de klas wordt doorgegeven aan ontwikkelaars, inspectie en ministerie

Maar …

… die vereniging is er al!
De Nederlandse Vereniging van Wiskundeleraren.
Deze vereniging doet deze zaken al jaren. Zelfs in toenemende mate!

Bovendien

- organiseert ze jaarlijks een studiedag, waarbij de wiskunde en de didactiek ervan in lezingen en werkgroepen aandacht krijgen
- ondersteunt ze de didactiekcommissie die series artikelen verzorgt over diverse onderwerpen
- ondersteunt ze de actieve werkgroep 'Vrouwen en Wiskunde'
- is ze direct betrokken bij het samenstellen van vraagstukkenbundels voor nieuwe programma's

En …

… ontvangt elk lid het blad Euclides, het vakblad voor de wiskundeleraar. Een blad dat in veel opzichten in wiskundig Nederland een belangrijke rol speelt.

Hierin vindt u:

- aankondigingen van bijeenkomsten van de vereniging
- actuele artikelen over de (school)wiskunde
- visies op het gebied van de didactiek
- ervaringen uit de klas van collega's
- werkbladen voor in de klas
- leuke (en lastige!) wiskundige puzzelopgaven om even voor te gaan zitten
- besprekingen van nieuwe binnen- en buitenlandse vakliteratuur

Eigenlijk …

… is het voor u helemaal niet moeilijk om de stijgende lijn van het ledenaantal voort te zetten: pak de telefoon en probeer het! Want u hoort erbij. Dan zijn alle bijeenkomsten voor u gratis en kunt u profiteren van de aanbiedingen die de vereniging voor haar leden weet te 'versieren' (zo nu en dan lukt ons wel eens iets).

Belt u even 0321 - 312543!